La homología es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes:

- Dos puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología.
- Dos rectas homólogas se cortan siempre en una recta fija llamada eje de homología.

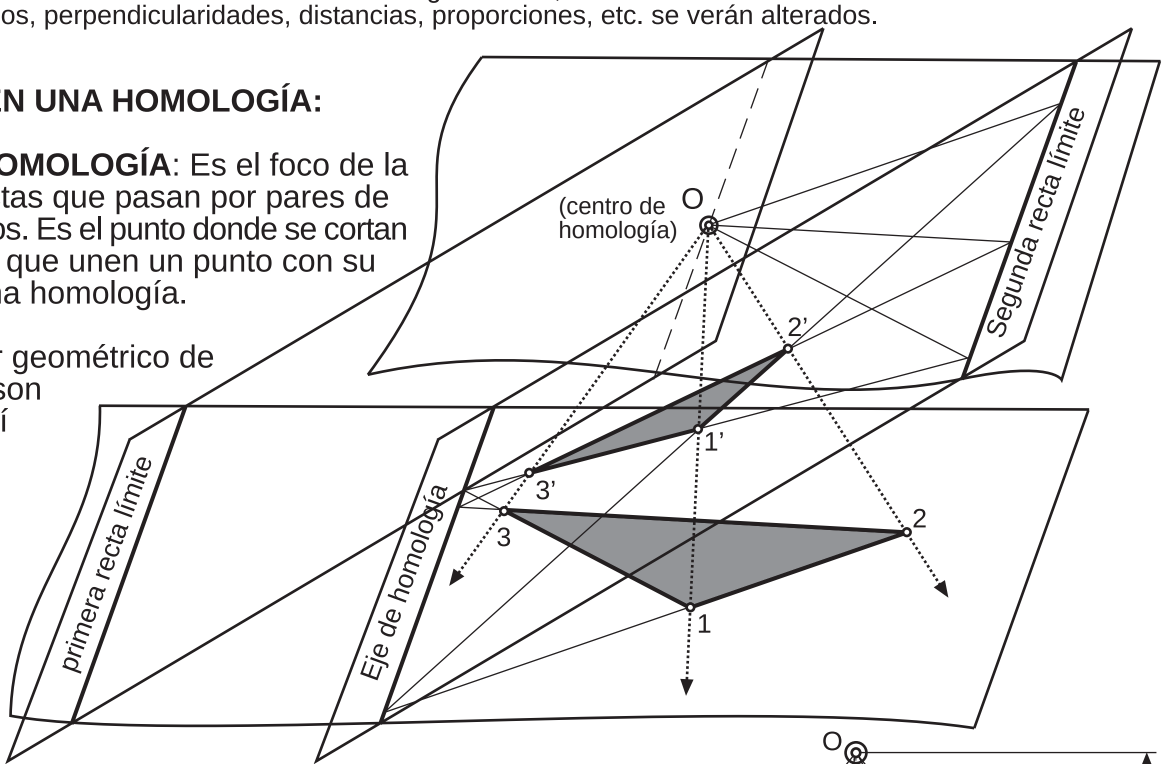
La homología solo mantiene el número de lados de la figura inicial, las demás características no se conservan: los ángulos, paralelismos, perpendicularidades, distancias, proporciones, etc. se verán alterados.

ELEMENTOS EN UNA HOMOLOGÍA:

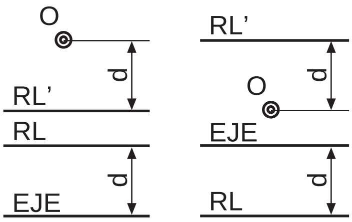
CENTRO DE HOMOLOGÍA: Es el foco de la radiación de rectas que pasan por pares de puntos homólogos. Es el punto donde se cortan todas las rectas que unen un punto con su homólogo en una homología.

EJE: Es el lugar geométrico de los puntos que son homólogos de sí mismos (puntos dobles).

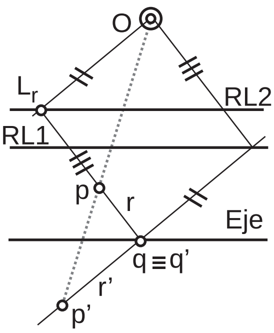
Rectas homólogas siempre convergen en el eje.



RECTAS LÍMITE: Es el lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos están en el infinito. Es una recta formada por puntos que no tienen homólogos (puntos impropios). Son dos RL1 y RL2 (tambien llamadas RL y RL').

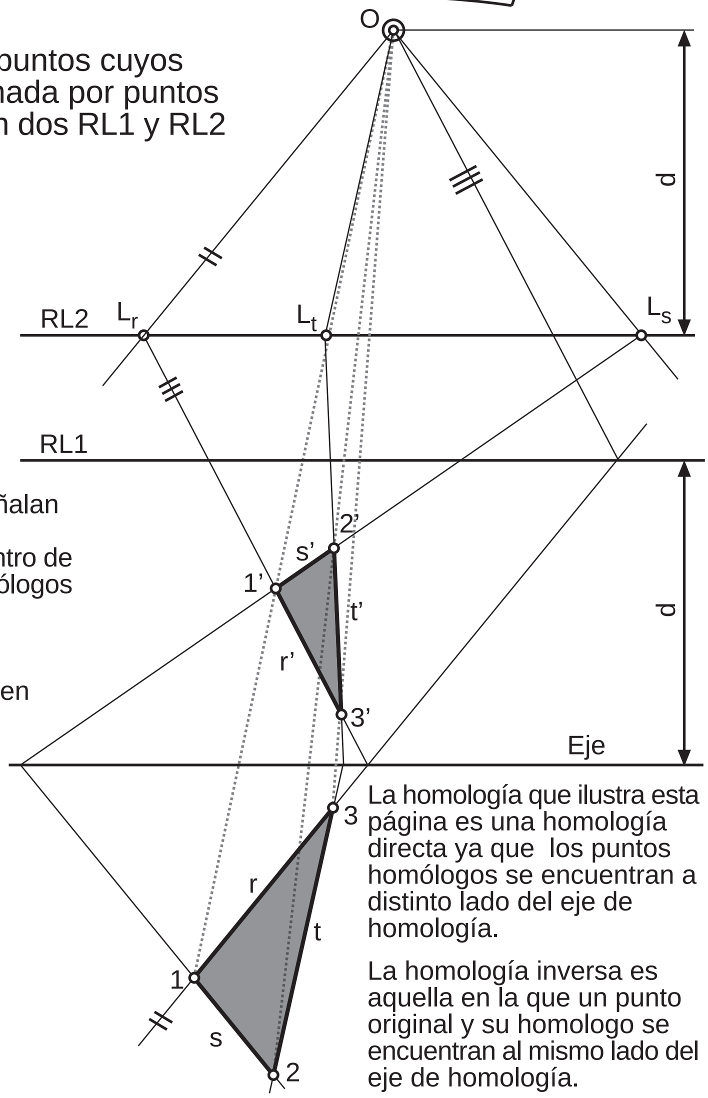


Las rectas límite son paralelas al eje y pueden estar bien entre el eje y el centro de homología o bien fuera de ellas a la misma distancia de estos.



A la izquierda una homología directa de una recta r y su homóloga r', similar a la que ilustra esta página donde se señalan aislados los elementos de la homología: eje, rectas límite, centro de homología, rectas y puntos homólogos y radiación.

qq' es un punto doble ya que original y transformados coinciden en su posición. Los puntos dobles están siempre sobre el eje de homología.

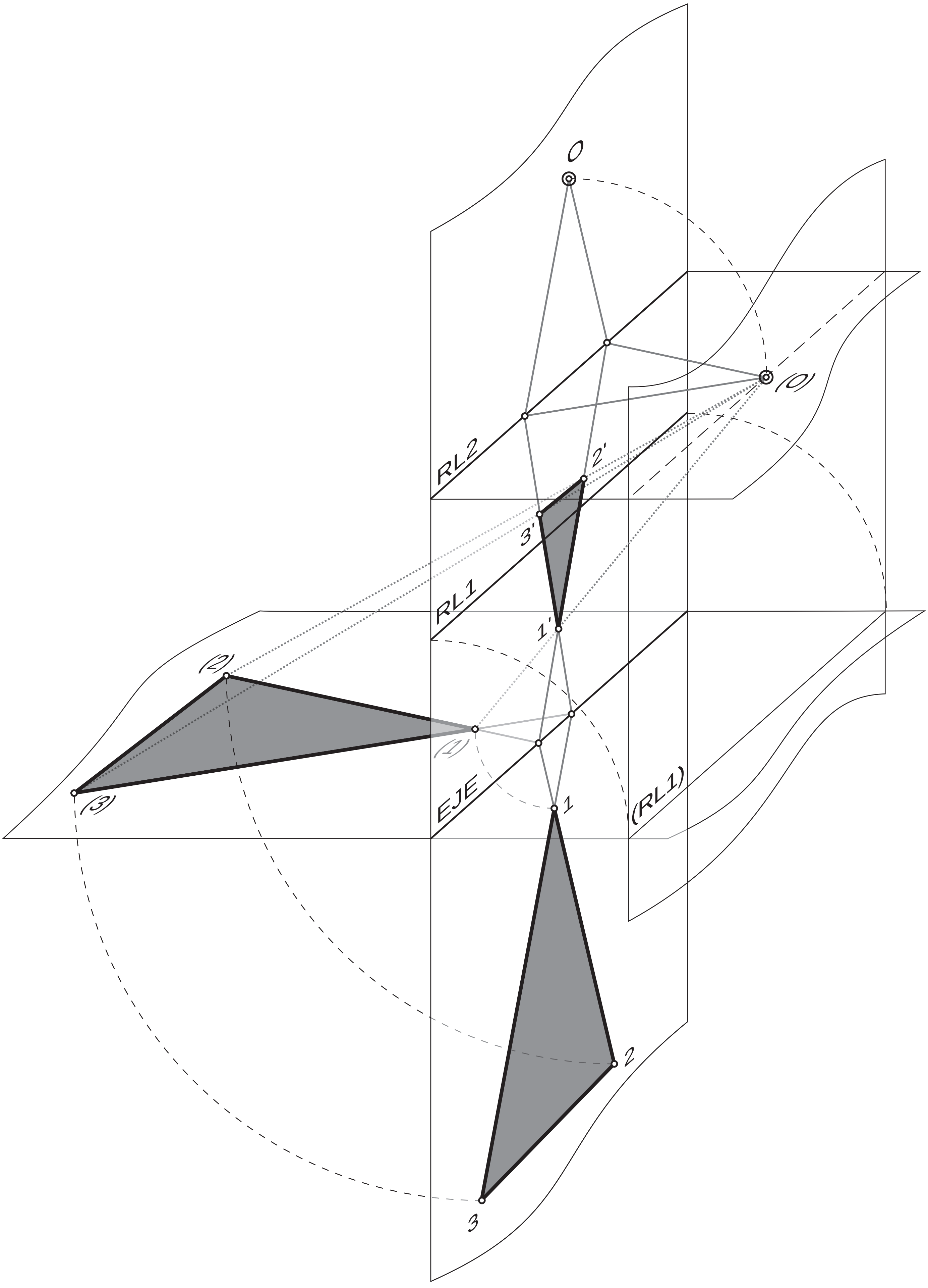


Una homología queda determinada conociendo los siguientes datos:

1- El eje, el centro y un par de puntos homólogos.
2- El centro y dos pares de rectas homólogas
3- Un punto doble y dos pares de puntos homólogos.
4- El centro, el eje y el coeficiente de homología
5- El centro y las dos rectas límite.
6- El centro, una recta límite y dos puntos homólogos.
7- El centro, el eje y una recta límite.
8- Dos figuras homólogas.

La homología que ilustra esta página es una homología directa ya que los puntos homólogos se encuentran a distinto lado del eje de homología.

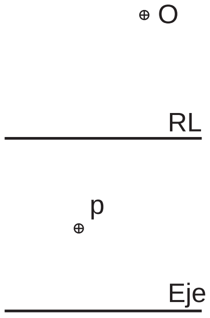
La homología inversa es aquella en la que un punto original y su homologo se encuentran al mismo lado del eje de homología.



LASLAMINAS.ES

HOMOLOGÍA: ABATIMIENTOS DE LOS PLANOS

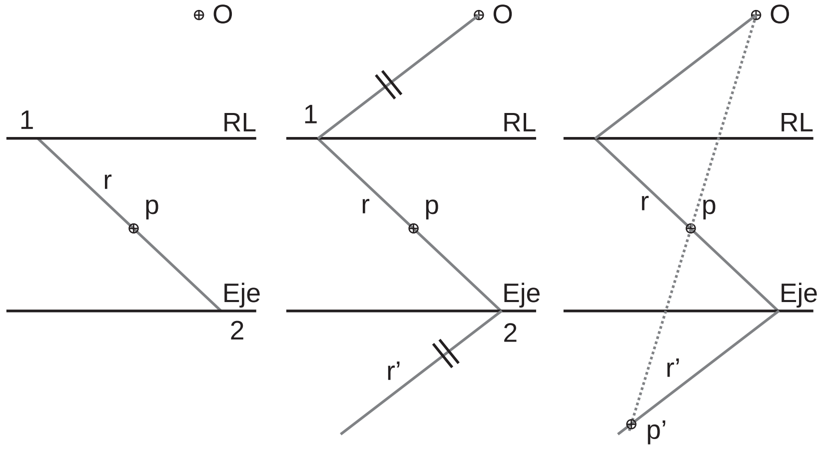
Conocido el centro O , la recta límite(2) y el eje, hallar el homologo de p, p’



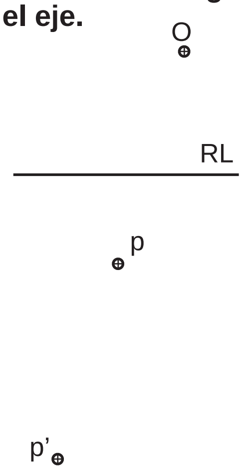
1º- Trazamos una recta r cualquiera que pasando por p corta a RL(2) en 1 y al eje en 2.

2º- Unimos el centro O con el punto 1 y por 2 trazamos una paralela.

3º- Trazamos una recta desde el centro O, pasando por p hasta que corta a r’ en el punto p’.



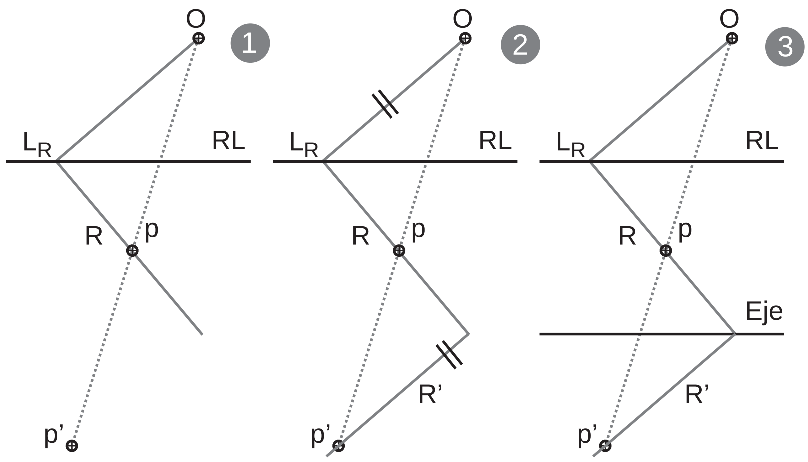
En una homología, conocido el centro O, la recta límite RL(2) y dos puntos, P y P’ homólogos, determinar el eje.



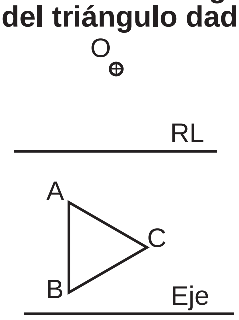
1º- Trazamos la radiación Opp’, una recta R cualquiera que corta a la recta límite en L_R y el segmento O- L_R

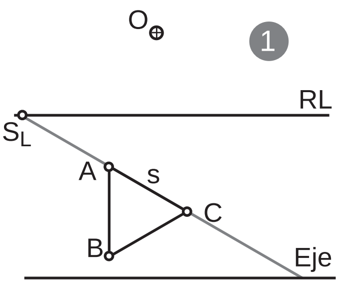
2º- Trazamos desde p’ R’, paralela al segmento O- L_R.

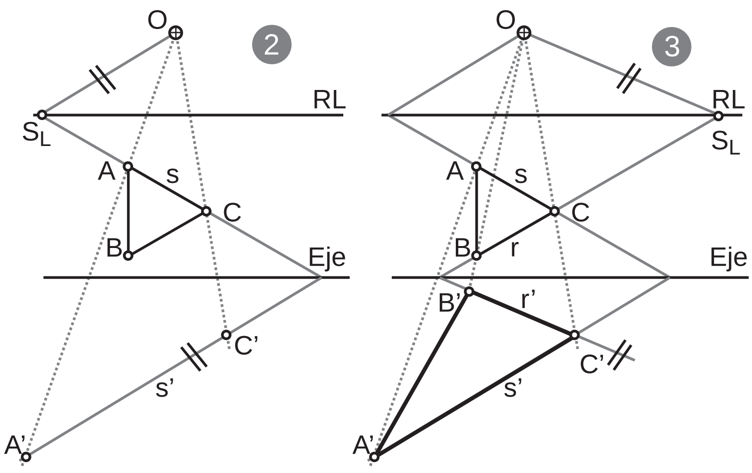
3º- El eje es paralelo a RL pasando por la intersección de R con R’.



En una homología, conocido el centro O, la recta límite RL(2) y el eje, determinar el triángulo homólogo del triángulo dado a, b, c.







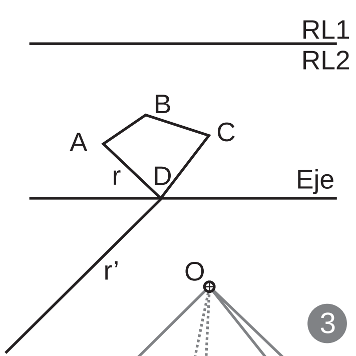
1º- Elegimos una recta del polígono de modo que corteA la RL (2) y al eje en dos puntos. En el caso de que no las hubiera por rozar el paralelismo o la perpendicularidad nos podría interesar escoger una diagonal u otra recta escogida estratégicamente.

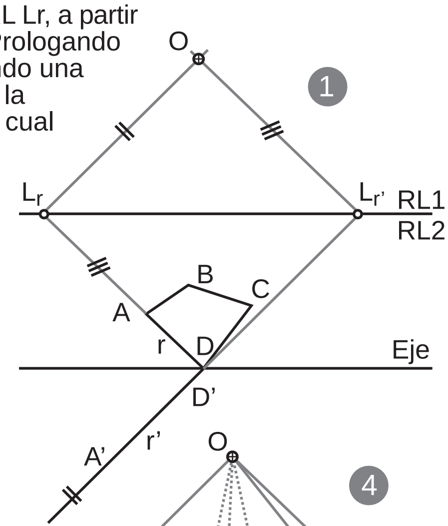
2º- Unimos el centro de homología con S_L, punto donde la recta s corta a la RL (2). Trazamos una paralela a esta pasando por el punto donde s corta al EJE, así obtenemos s’. Trazamos la recta OA, prolongandola hasta cortar S’ en A’. Trazamos la recta OC hasta cortar s’ en C’.

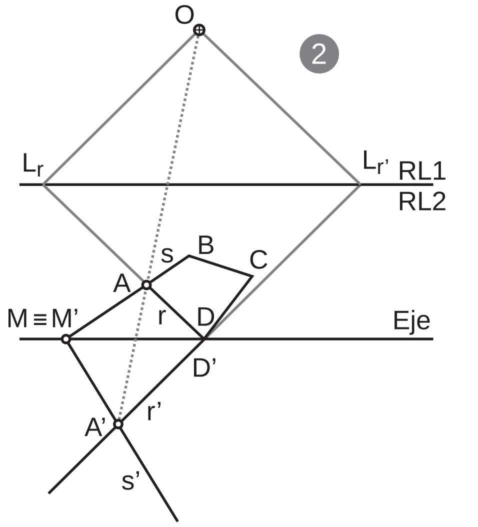
3º- Prolongamos el lado BC (recta r), hasta cortar el eje, Unimos dicha intersección con C’ y así obtenemos r’ y trazando la recta OB, hasta cortar r’ obtenemos B’. En este caso no es necesario unir R_L con O y trazar la paralela desde el eje,p ues ya tenemos un punto homólogo que pèrtenece a r’ (C’). No obstante este paralelismo ha sido representado y remarcado.

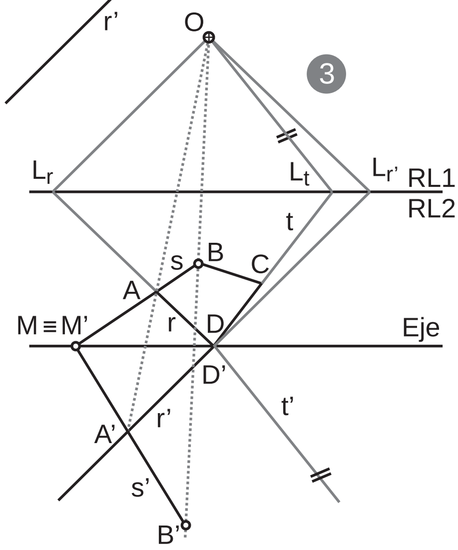
Dada una homología por sus dos rectas límite RL1 y RL2, que son coincidentes, por su eje y por dos rectas r y r’ homólogas. Hallar el centro O y la figura homológica del cuadrilátero ABCD.

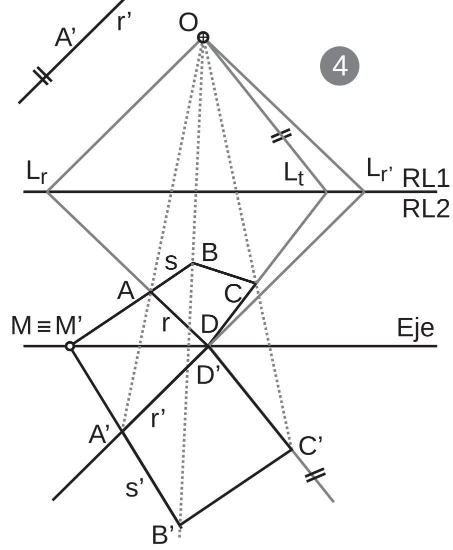
1º- Prolongando r obtenemos sobre RL Lr, a partir de Lr trazamos una paralela a r. Prologando r’ obtenemos sobre RL Lr’, trazando una paralela desde Lr’ a r obtenemos la intersección con la paralela a r la cual es el centro de homología











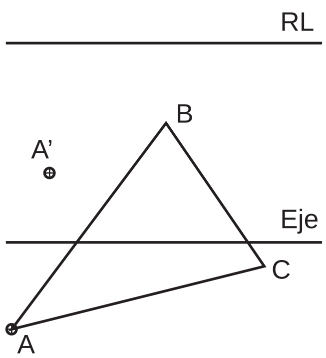
2º-Trazando el rayo OA obtenemos sobre r’ A’. Prolongamos el segmento AB (recta s) obteniendo sobre el eje el punto doble MM’. Uniendo M’ con A’ obtenemos s’.

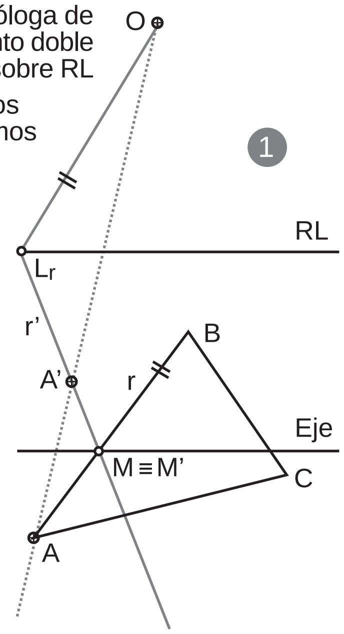
3º- Prolongamos el segmento CD (recta t) hasta cortar a RL en Lt. Unimos Lt con O y trazamos una paralela a este segmento a partir de D’ sobre el eje, esta paralela es t’.

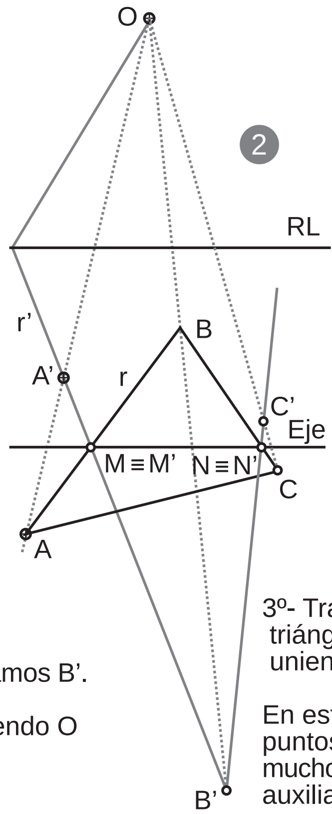
4º- Trazamos el rayo OC para obtener C’ sobre t’, de este modo ya podemos completar el cuadrilátero homólogo.

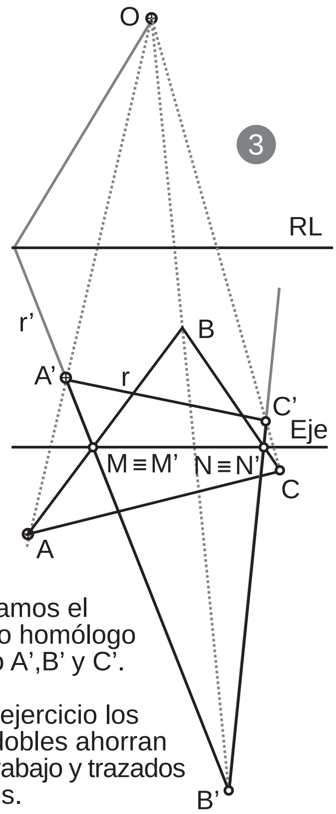
Dados el eje, la recta límite RL y un par de puntos homólogos a y a’, hallar el centro de homología O y la figura homológica del triángulo ABC.

1º-Trazamos la recta r’, homóloga de r, uniendo A’ con MM’, punto doble sobre el eje. Obtenemos sobre RL Lr. A partir de Lr trazamos una paralela ar y unimos AA’ para obtener O, centro de homología.









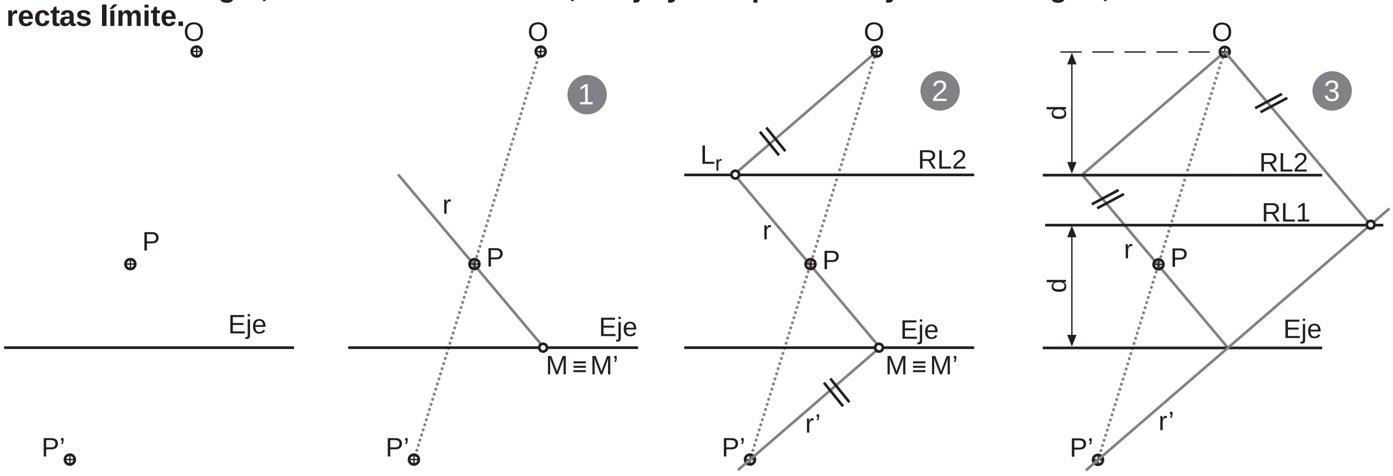
2º-En la prolongación de r’, trazando el rayo OB encontramos B’.

Unimos B’ con NN’ (punto doble), obteniendo s’. Uniendo O con C obtenemos sobre s’ C’.

3º- Trazamos el triángulo homólogo uniendo A’,B’ y C’.

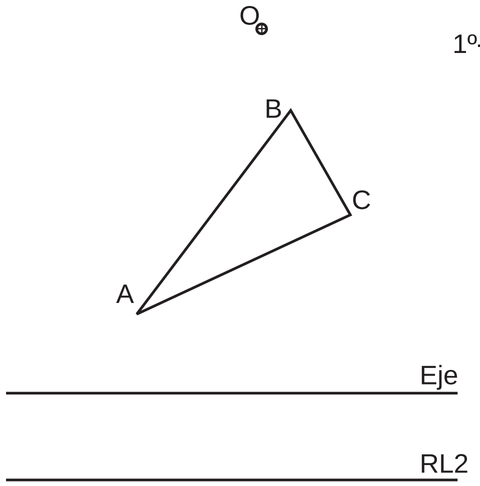
En este ejercicio los puntos dobles ahorran mucho trabajo y trazados auxiliares.

En una homología, conocido el centro O, el eje y dos puntos P y P’ homólogos, determinar las rectas límite.



1º- Unimos OPP’ y trazamos una recta cualquiera por P (recta r) que corta al eje dado en MM’ (punto doble).
2º- Unimos MM’ con P’ y a este segmento le trazamos una recta paralela que corta a t en Lr. Por Lr, paralela al eje se encuentra la RL2.
3º- A la misma distancia del eje que la que distancia entre O y RL2 se encuentra RL1. También podemos obtener esta prolongando r’ y trazando una paralela a r desde O.

En una homología, conocido el centro O, el eje y la recta límite RL2, determinar el triángulo a’, b’, c’.

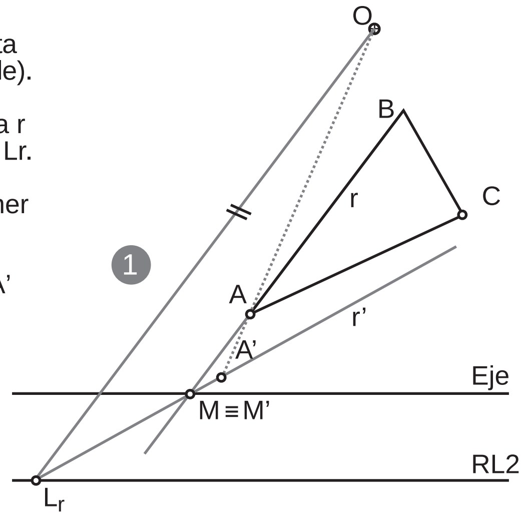


1º- Prolongamos AB (recta r) hasta cortar el eje en MM’(punto doble).

Trazamos por O una paralela a r cortando en RL2 para obtener Lr.

Unimos Lr con MM’ para obtener r.’

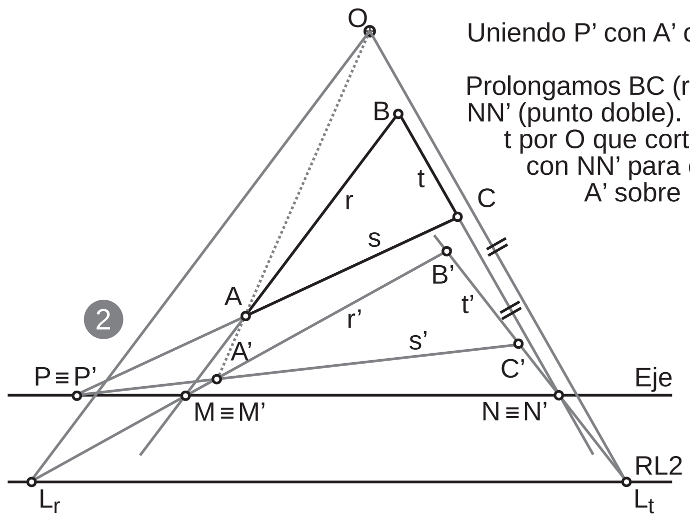
Uniendo O con A obtenemos A’ sobre r’.

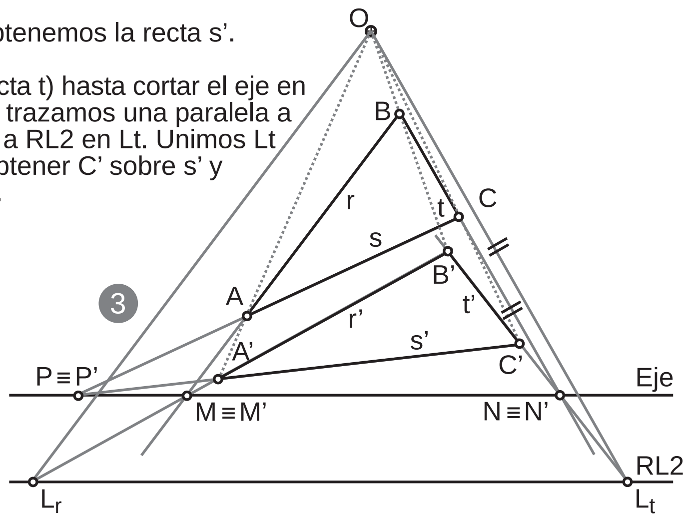


2º- Prolongamos AC (recta s) hasta cortar el eje en PP’ (punto doble).

Uniendo P’ con A’ obtenemos la recta s’.

Prolongamos BC (recta t) hasta cortar el eje en NN’ (punto doble). Y trazamos una paralela a t por O que corta a RL2 en Lt. Unimos Lt con NN’ para obtener C’ sobre s’ y A’ sobre r’.



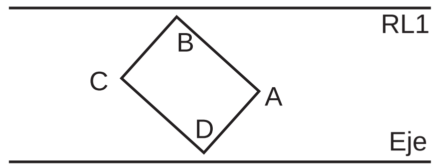


3º- Ya tenemos A’,B’ y C’ vértices homólogos del triángulo dado.

En la tercera ilustración se ha completado la radiación desde el centro de homología con OCC’ y OBB’, simplemente para comprobar la corrección de la solución, aunque esto no es necesario.

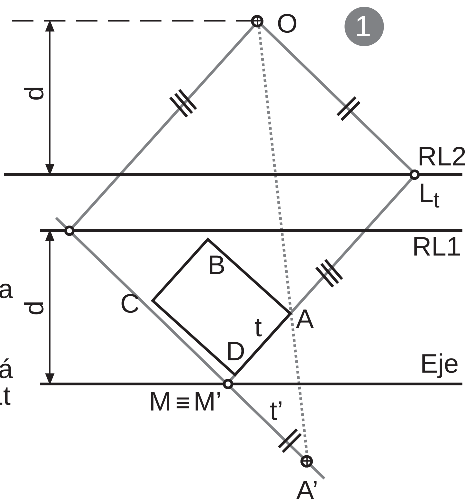
Nos encontramos ante una homología inversa, ya que ambos triángulos homólogos se encuentran al mismo lado del eje de homología.

En una homología, conocida la RL1, el eje y dos puntos A y A' homólogos, determinar la figura homológica del rectángulo ABCD.

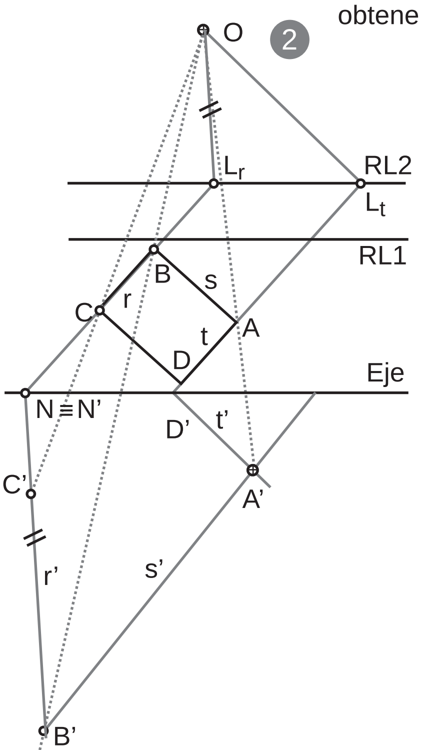


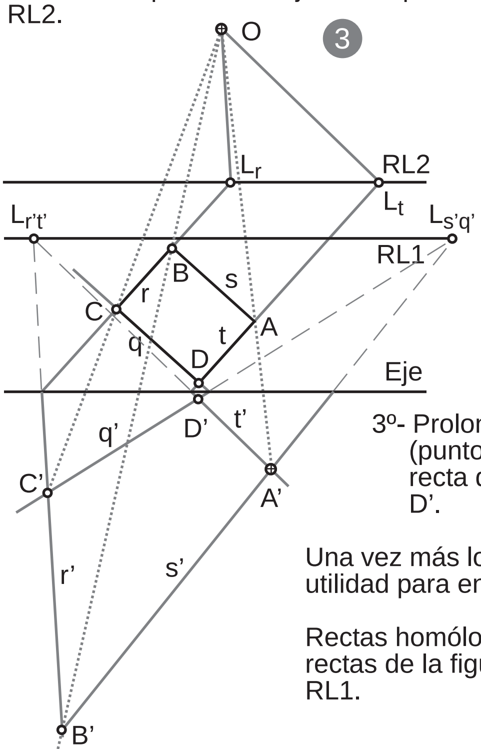
1º- Determinamos O:

Prolongando t hasta obtener MM' sobre el eje podemos unir M' con A'. t' nos da un punto sobre RL1 a partir del cual trazamos una paralela a t. Uniendo A' con A obtenemos sobre la paralela a t el centro de homología O.



Determinamos la RL2:
Bien situándola a la misma distancia que RL1 del eje desde el centro O. O bien polongando DA (recta t) hasta el eje, obteniendo sobre él un punto doble MM' para poder trazar t' (uniendo M' con A'). Así trazamos la paralela a t' desde el centro O que cortará a t en Lt. Pasando una paralela al eje o RL1 por Lt obtenemos RL2.





2º-Prolongamos CB (recta r) cortando a RL2 en Lr y al eje en NN'(punto doble).

Trazamos una paralela desde N' a O-Lr, esta será r'.

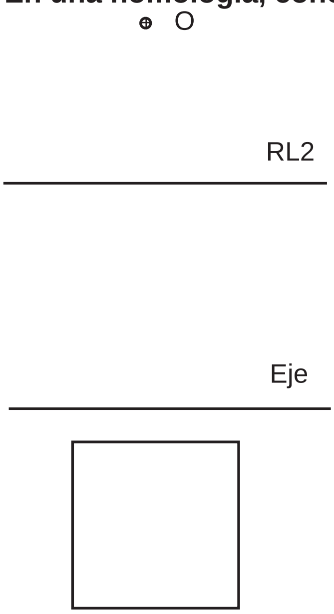
Trazamos la recta OB que corta la prolongación de r' en B'. OC la cortará en C'.

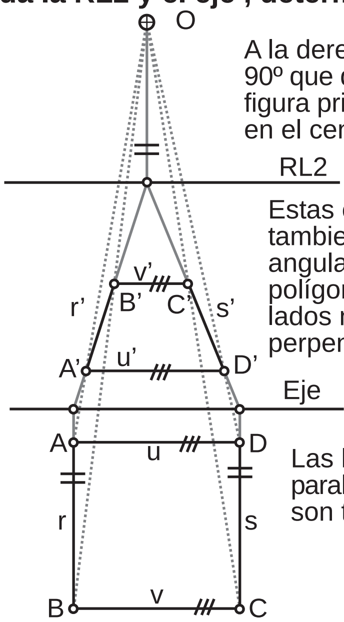
3º- Prolongamos CD hasta cortar el eje en PP' (punto doble) y lo unimos con C', esta es la recta q' que en su intersección con t' nos da D'.

Una vez más los puntos dobles nos han sido de gran utilidad para encontrar rectas homólogas.

Rectas homólogas se cortan en el eje y los pares de rectas de la figura homóloga A'B'C'D' se cortan en la RL1.

En una homología, conocida la RL2 y el eje , determinar la figura homológica del cuadrado ABCD.

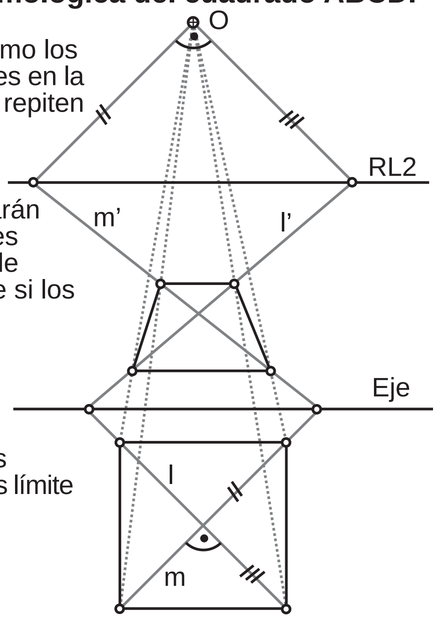




A la derecha observamos como los 90º que dorman las diagonales en la figura primitiva u origiunal se repiten en el centro de homología.

Estas circunstancias se darán tambien con las magnitudes angulares de los vértices de polígonos, más claramente si los lados no son paralelos ni perpendiculares al eje.

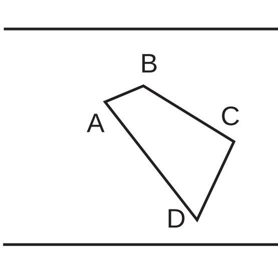
Las homólogas de rectas paralelas al eje y las rectas límite son también paralelas.



Este ejercicio ha sido resuelto en primer lugar prologando los lados para obtener los puntos dobles y las rectas en el infinito. Y en segundo lugar trazando las diagonales l y m del cuadrado. Este recurso, buscar diagonales de polígonos y encontrar sus homólogas, es muy recurrente ya que en ocasiones lo s lados cortan a eje o RL fuera de los límites del papel.

LASLAMINAS.ES	HOMOLOGÍA 4: Cuadriláteros/polígonos homólogos.

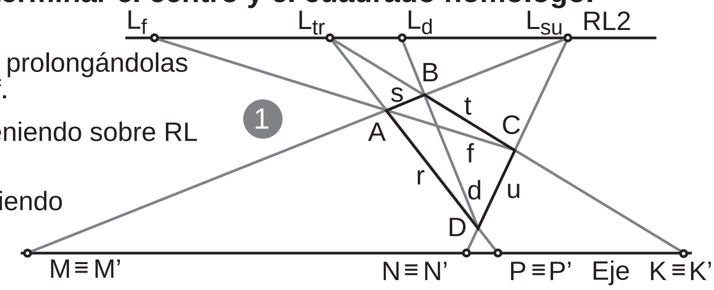
En una homología, conocida la RL(2) y el eje, determinar el centro y el cuadrado homólogo.

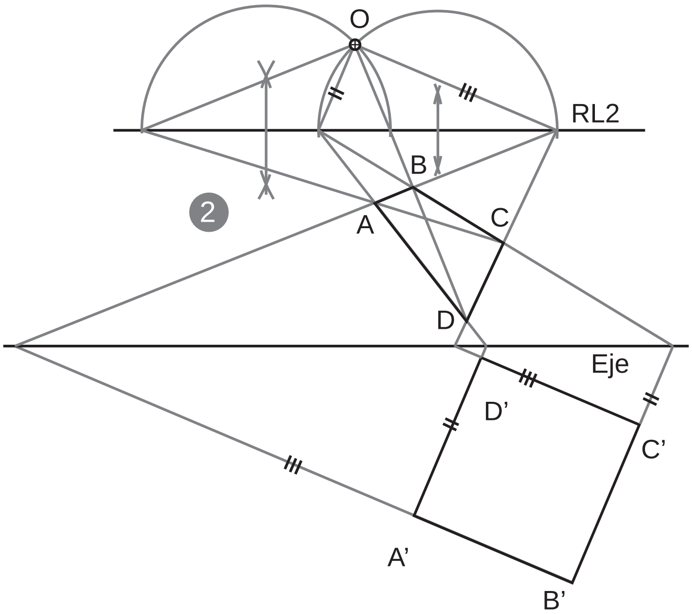


1º- Trazamos las diagonales d y f, prolongándolas hasta RL en los puntos Ld y Lf.

Trazamos los lados s y u, obteniendo sobre RL el punto Lsu.

Trazamos los lados r y t obteniendo sobre RL el punto Lrt.





2º- Todos los ángulos del cuadrado forman 90º, st, tu, ur y rs formarán 90 en la figura homóloga. También las diagonasles fd formaran 90º.

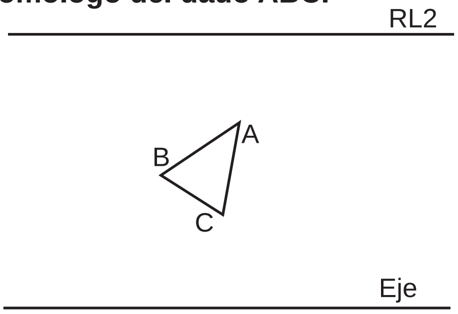
Por lo tanto las rectas que partan del centro hasta Ltr y Lsu formarán 90º en O. Trazamos el arco capaz de 90º del segmento Ltr-Lsu.

También las rectas que partan de O hasta Ld y Lf formarán 90º. Trazamos el arco capaz de 90º del segmento Ld-Lf.

En la intersección de los dos arcos capaces obtenemos O.

Prolongando hasta el eje los lados de la figura dada obtenemos puntos dobles a partir de los cuales debemos trazar paralelas a las rectas que parten del centro O hasta los límites de los lados y las diagonales y así obtenemos el cuadrado buscado.

En una homología, conocida la RL(2) y el eje, determinar el centro y el triángulo equilátero A'B'C' homólogo del dado ABC.



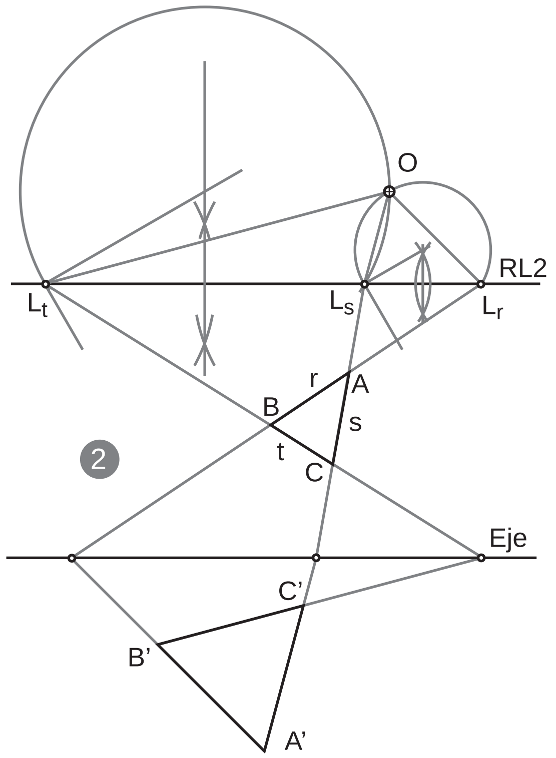
1º- En este caso sabemos que los angulos interiores de un triángulo equilatero forman 60º cada uno.

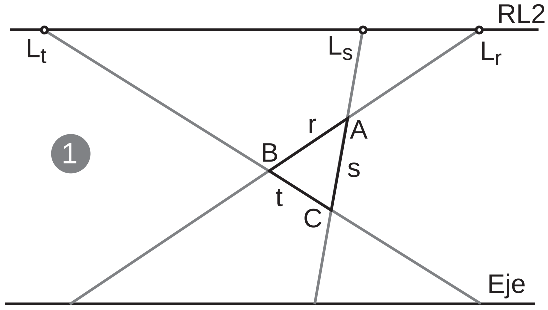
Prolongamos las rectas r, s y t hasta obtener sus límites en el infinito sobre RL2.

2º- Trazamos el arco capaz de 60º del segmento Ls-Lr.
Trazamos el arco capaz de 60º del segmento Ls-Lt

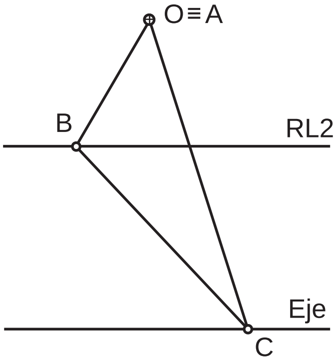
El punto de intersección de ambos arcos es el centro de homología desde el cual trazamos rectas hasta Lt, Ls y Lr.

A las cuales trazamos paralelas desde los puntos dobles sobre el eje para obtener el triángulo.

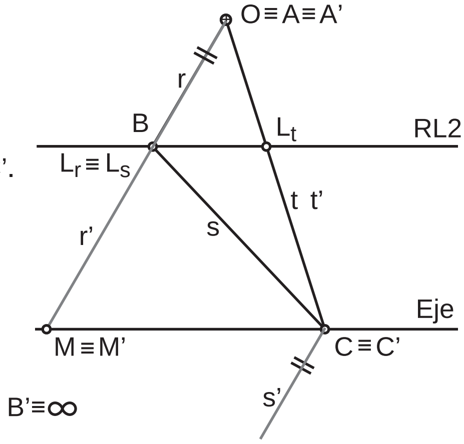




En una homología, conocida la RL(2), el eje y el centro O, determinar la figura homológica del triángulo ABC, estando A sobre el centro O, B sobre RL(2) y C sobre el eje de homología.



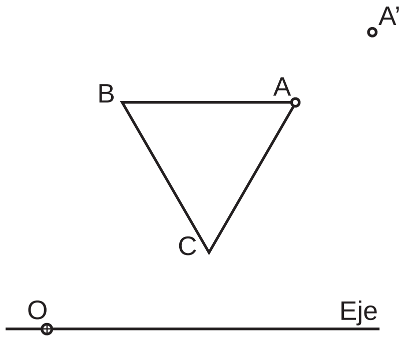
- La paralela a O Lt por el punto doble CC' es t', que coincide con t.
- Del mismo modo: La paralela a O Lr por el punto doble MM' es r', tambien coincidente con r.
- s' es paralela a O Ls por el punto doble CC'.
- A y A' coinciden en O. Y CC' es un punto doble sobre el eje.
- Al ser r' y s' paralelas, B' es un punto perteneciente a ellas en el infinito.

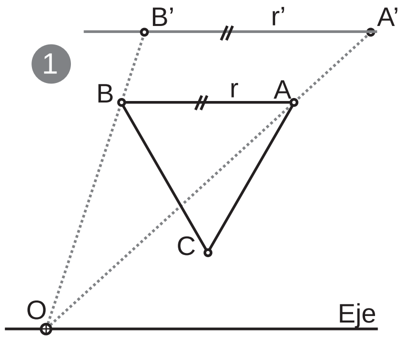


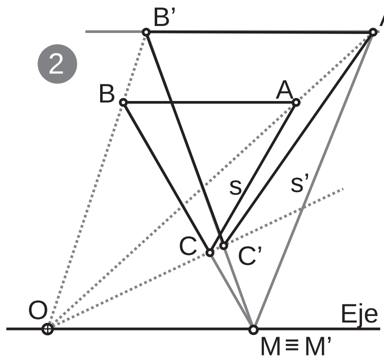
Como dijimos al enunciar los elementos de la homología, los homólogos de los puntos pertenecientes a las rectas límite se encuentran en el infinito.

En una homología, conocido el eje, el centro de homología situado sobre este y un par de puntos homólogos AA' determinar la figura homológica del triángulo ABC.

Nos encontramos ante una **elación** es una homología en la que el centro y el eje de la homología son coincidentes.







1º- El segmento AB es paralelo al eje de homología, por lo tanto B'A' tambien lo será. Con esto podemos trazar el rayo OB y determinar B'.
2º- Prolongamos BC hasta cortar el eje en el punto doble MM', unimos M' con A' para obtener s'. Trazando el rayo OC obtenemos sobre s' C' y ya podemos completar el triángulo homólogo A'B'C'

CURVAS CÓNICAS Y HOMOLOGÍA:

La figura homóloga de una circunferencia es una curva cónica. Esta será una elipse, parábola o hipérbola dependiendo de la posición relativa de la circunferencia con la rectas límite 2:

- Cuando RL es exterior a la circunferencia la figura homóloga será siempre una elipse.
- Cuando RL es tangente a la circunferencia la figura homológica será una parábola.
- En caso de que RL sea secante a la circunferencia la figúra homóloga será una hipérbola.

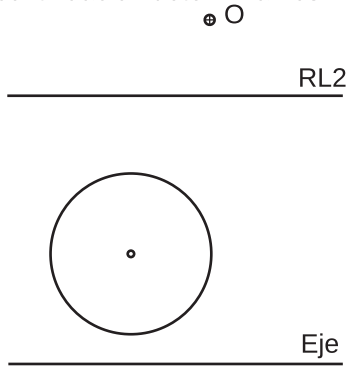
Propiedades

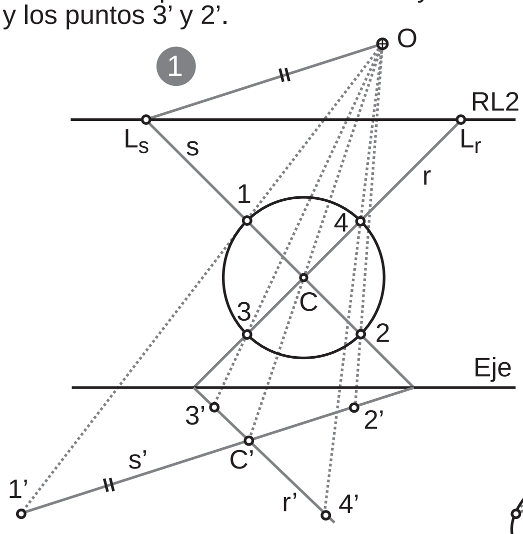
- La recta tangente común a una cruva cónica pasa siempre por el centro de homología.
- Si dos cónicas homlogicas son secantes, la recta que une lospuntso de intersección entre ambas es el eje de homología Si son tangentes el punto de tangencia pertenece al eje de homología (puntos dobles).
- En una homología el centro de una cónica se transforma en el polo de una recta límite respecto de la figura homológica.

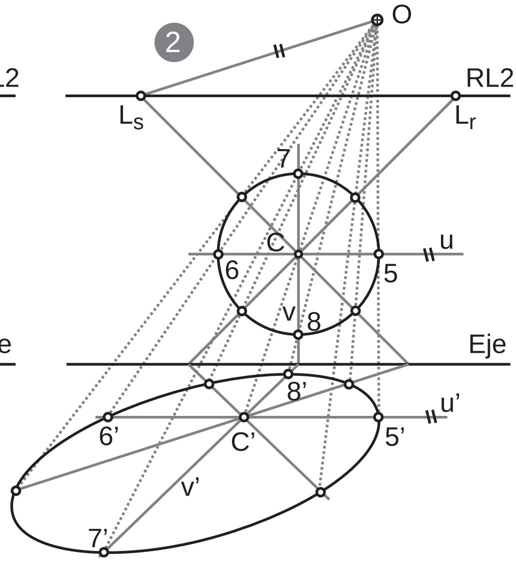
En una homología, conocida la RL(2), el eje y el centro O, determinar la figura homológica de la circunferencia de centro C.

Para resolver este ejercicio vamos a aplicar los convencionalismos o leyes generales de la homología, trazando diámetros y sus homólogos para obtener sobre ellos puntos homólogos que deteminen la elipse.

1º- Trazamos dos diámetros, r y s, que cortan a RL2 al eje obtenemos la homóloga de s trazando desde su punto doble sobre el eje una paralela a O-Ls. Asó podemos trazar los rayos correspondientes que nos dan 1’, C’ y 2’. A continuación determinamos r’ y los puntos 3’ y 2’.







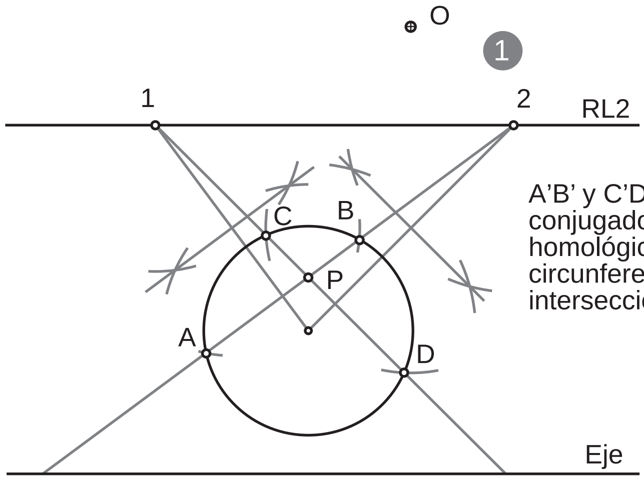
Podemos repetir esta operación con tantos diámetros como queramos. Siempre podremos determinar 2 puntos de la figura transformada.

2º- Trazamos otros dos diámetros, en este caso uno es perpendicular a RL y al eje y el otro es paralelo. Así determinamos dos puntos más de la elipse homológica de la circunferencia y podemos trazarla a mano alzada.

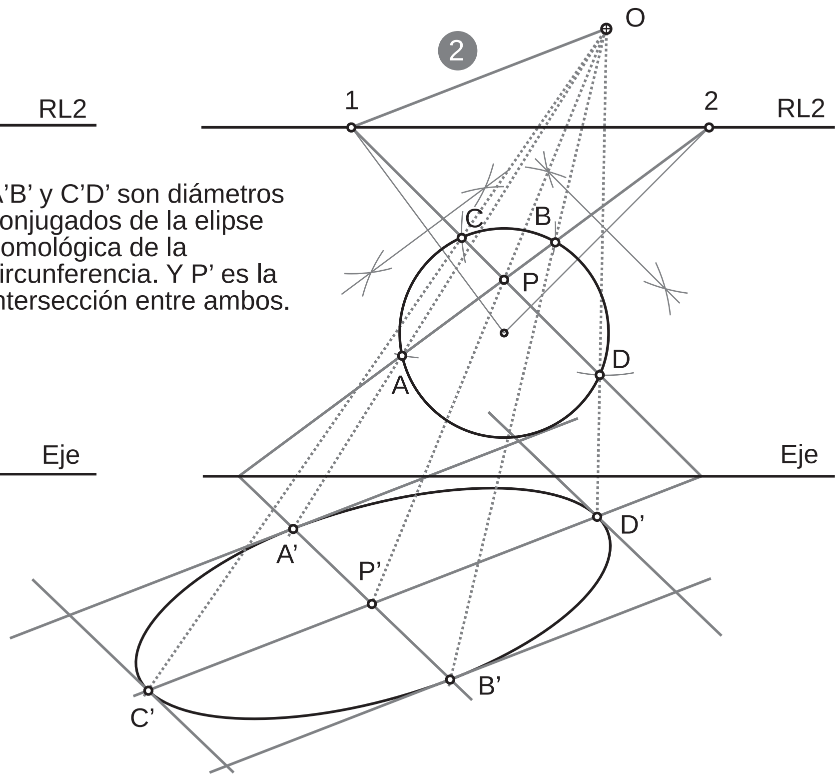
De este modo no conseguimos puntos distribuidos equitativamente sobre la elipse lo cual dificulta su trazado a mano alzada. Podemos observar que ninguno de los diámetros homológicos son ejes o diámetros conjugados de la elipse (en cualquiera de estos dos casos se cortarían por su punto medio). Y lo ideal sería obtener los ejes de la elipse o los diametros conjugados para trazar la elipse mediante cualquiera de sus métodos. Convirtiendo la recta límite en polar de la circunferencia y encontrando su polo podemos conseguir esto.

1º- Elegimos un punto al azar 1 (desplazado de la perpendicular del centro a la RL2) sobre RL2 a partir del cual trazaremos las rectas tangentes a la cir. dada. No trazamos las rectas tangentes pero si hallamos los puntos de tangencia A y B.

Unimos A con B oteniendo sobre RL2 el punto 2, a partir del cual repetimos la operación (rectas tangentes pto.-cir.) hallando C y D prolongando CD nos encontraremos en RL2 con el punto 1. La intersección de CD con AB es el Polo de la circunferencia, siendo RL2 su recta polar.

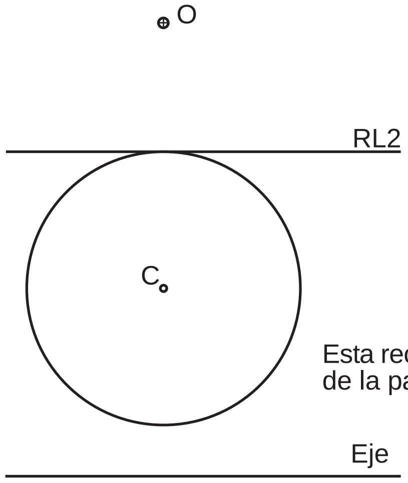


A’B’ y C’D’ son diámetros conjugados de la elipse homológica de la circunferencia. Y P’ es la intersección entre ambos.



2º- De este modo solo tenemos que determinar A’B’ y C’D’ para a partir de ahí emplear cualquiera de los multiples métodos que existen para trazar una elipse a partir de los diámetros conjugados o de una “caja” axonométrica.

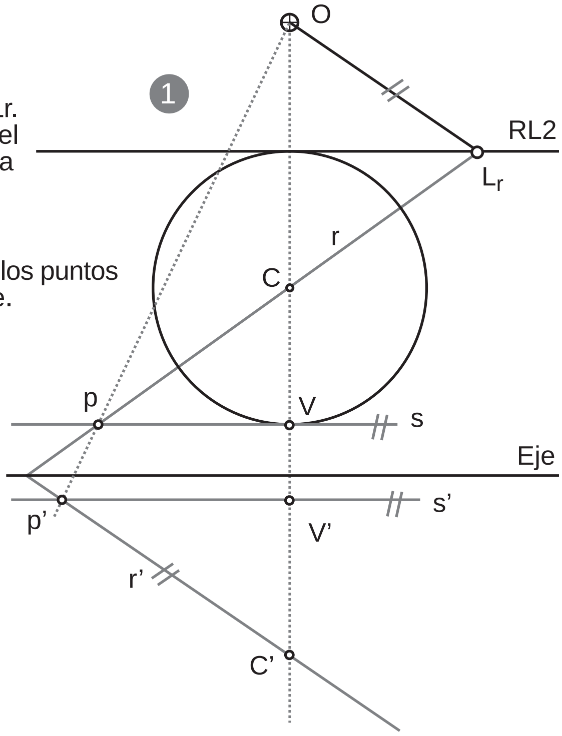
En una homología, conocida la RL(2), el eje y el centro O, determinar la figura homológica de la circunferencia de centro C.



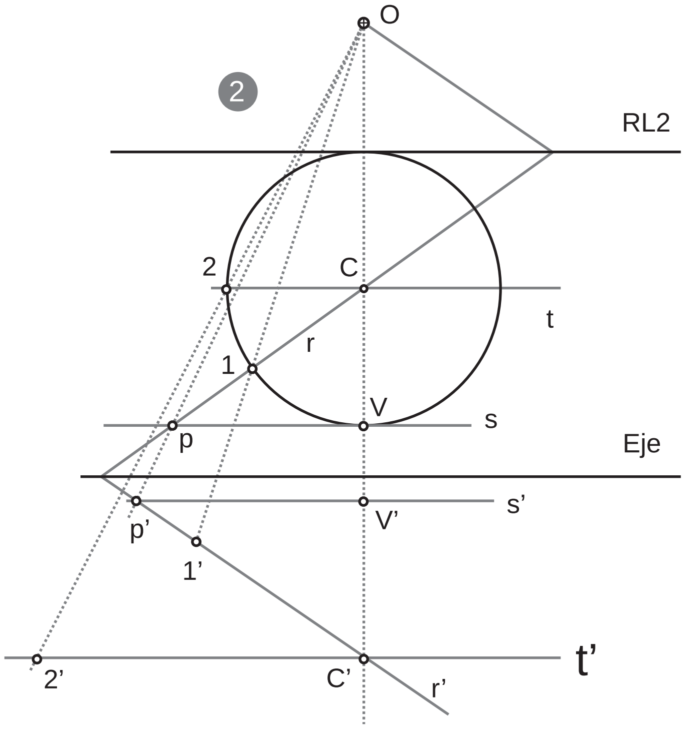
Cuando la cir. es tangente a la recta límite. El homólogo del punto de tangencia es un punto impropio (en el infinito).

1º- Trazamos una recta r, oblicua a RL obteniendo Lr. Por el punto doble sobre el eje trazamos una paralela a O-Lr para obtener r'

Esta recta r nos va a ayudar a encontrar los puntos de la parábola trazando paralelas al Eje.



Por el extremo opuesto al pto de tg, V, trazamos una paralela s que nos da sobre r el punto p. Trazamos el rayo Op que nos da sobre r' el homólogo p'. A partir de p' trazamos una paralela a s, s', que nos dara sobre el rayo OV el pto. V'. C' tambien se encuentra sobre r' y el rayo OR.



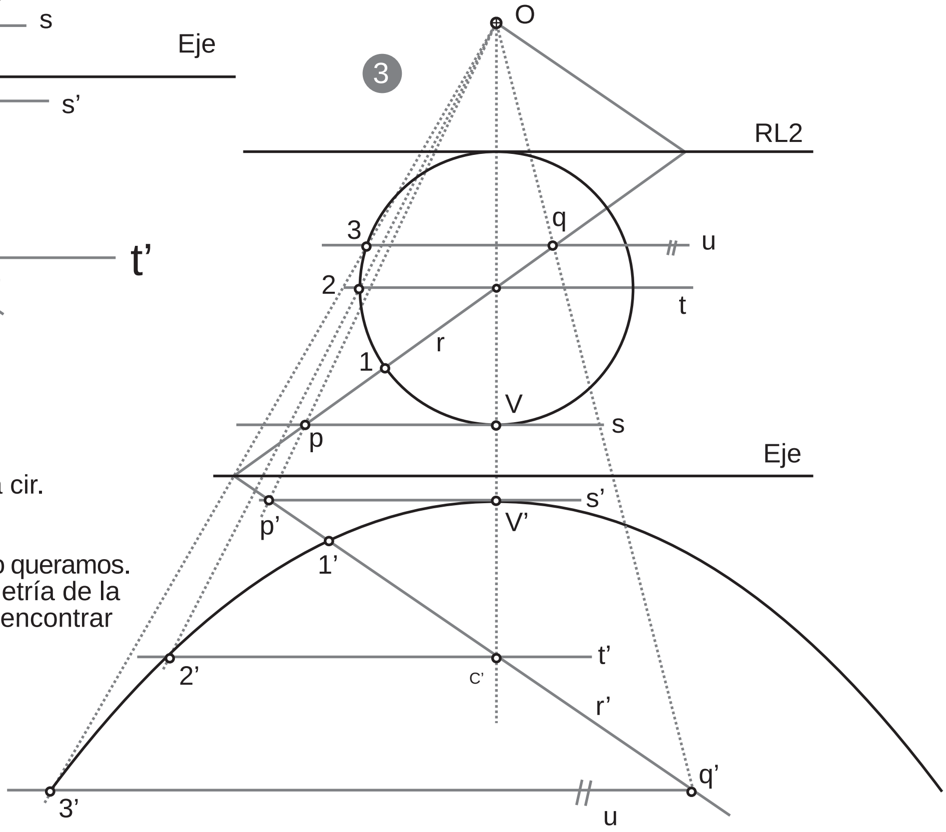
2º- Sobre la recta r y la cir. vemos el punto 1. El rayo O-1 nos da sobre r' el pto. 1'.

Trazamos una paralela al eje t que corta a r en C, por lo que t' será paralela al eje por C'. Sobre la cir. y la recta t encontramos 2, del cual obtenemos el homólogo 2' sobre t' trazando el rayo O-2.

3º- Repitiendo este proceso:

1º Paralela,
2º homologo de la interseccion con r
3º homólogo de la intersección con la cir.

Podemos encontrar tantos puntso como queramos. Para este ejercicio empleamos la simetría de la parábola respecto al rayo OCC' para encontrar los puntos simétricos de la parábola.

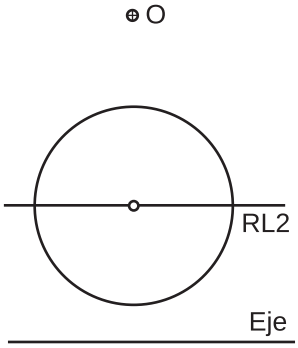


LASLAMINAS.ES

HOMOLOGÍA 8:
Circunferencia-Parábola .

En una homología, conocida la RL(2), el eje y el centro O, determinar la figura homológica de la circunferencia de centro C.

Cuando la cir. es secante a la recta límite. Los homólogos de los puntos de intersección son dos puntos impropios (en el infinito).

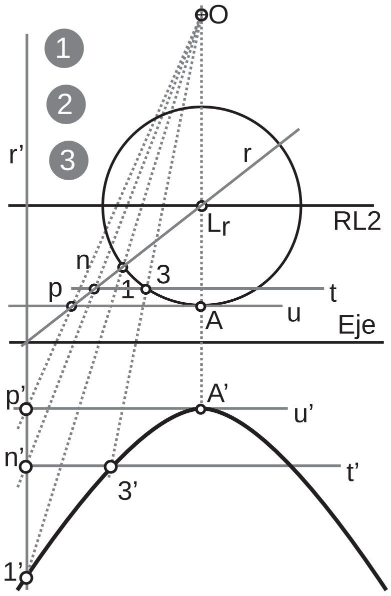


El método que hemos aplicado es el mismo que el que hemos puesto en práctica con la parábola.

1º-Trazamos una recta r que corta a la circunferencia y a la RL2 y al eje.

2º- Obtenemos r'.

3º- Trazamos rectas secantes paralelas al eje y a RL2, de las que, con ayuda de r', obtenemos sus homólogas y los puntos de intersección con la circunferencia



A la izq. vemos como se han llevado a cabo los 3 primeros pasos.

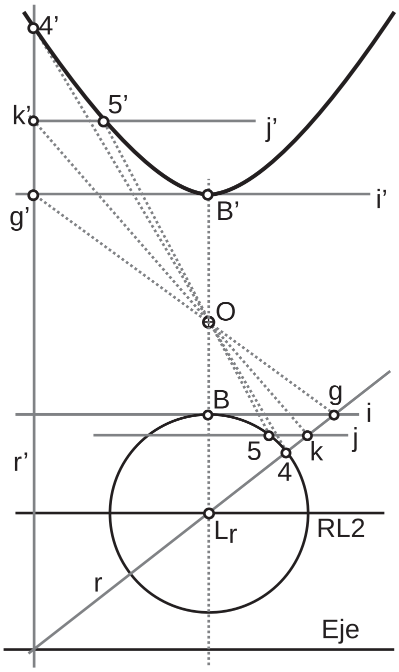
Del paso 3, sin embargo, solo hemos sacado:

-La recta uu' que contiene el vértice A'.

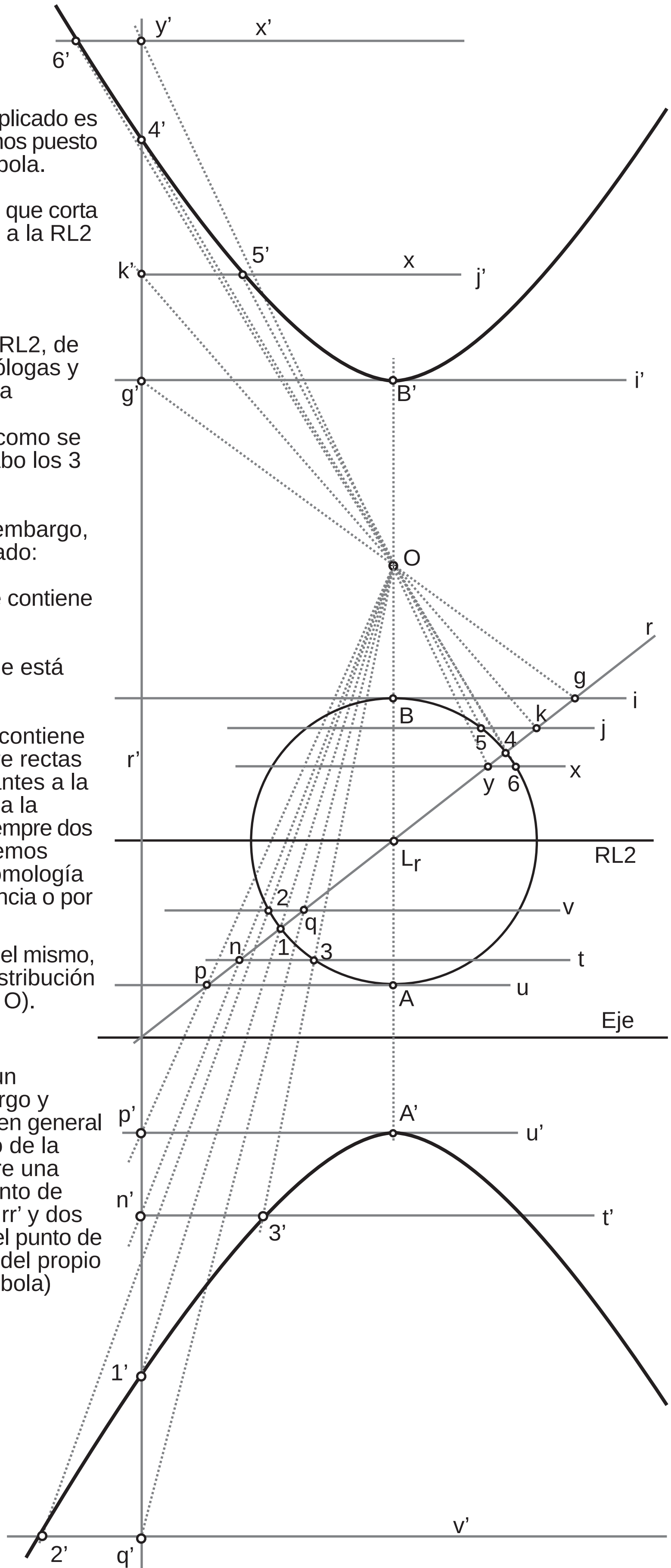
-El punto 1-1' que está contenido en rr'

-La recta tt' que contiene el punto 3'. Sobre rectas como esta (secantes a la circunferencia y a la hipérbola) hay siempre dos puntos que podemos encontrar por homología con la circunferencia o por simetría.

Para la otra rama de la hipérbola el procedimiento es el mismo, con la misma recta rr'. La diferencia estriba en la distribución de los puntos homólogos (a distinto lado del centro O).



Ciertamente es un procedimiento largo y engorroso, pues en general obtener un punto de la hipérbola requiere una horizontal, un punto de intersección con rr' y dos radiaciones (la del punto de intersección y la del propio punto de la hipérbola)



LASLAMINAS.ES

HOMOLOGÍA 9:
Circunferencia-Hipérbola.