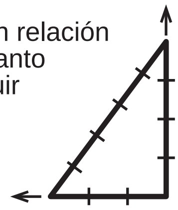
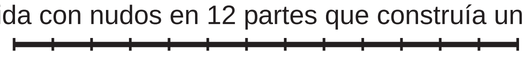
La geometría, del griego **geo** (**tierra**) y **métrica** (**medida**), es una rama de la matemática que se ocupa del estudio y las propiedades de las figuras geométricas en el plano.Tiene aplicaciónes prácticas multitud de disciplinas.

COMIENZOS EN EGIPTO



Es una de las más antiguas ciencias. Inicialmente, constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. En el Antiguo Egipto estaba muy desarrollada y se empleaba tanto construir las pirámides como para dividir y parcelar las tierras de cultivo a orillas del nilo o para construir edificios empleando el ángulo recto.

El "**triángulo egipcio**" consistía en una cuerda divida con nudos en 12 partes que construía un rectángulo, con lados de 3 4 y 5 partes, parcelar las tierras o dibujar plantas de edificios.

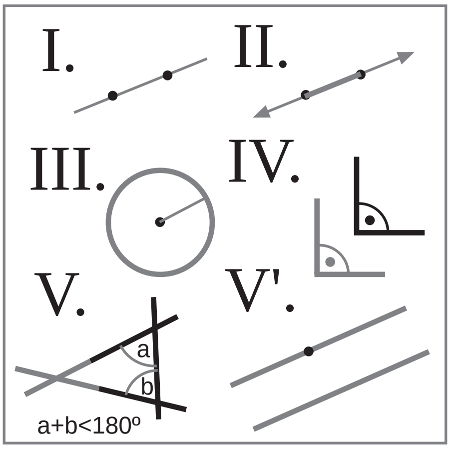


ANTIGUA GRECIA

Tales de Mileto (s. VI ac) aprendió en Egipto los conocimientos geométricos de sacerdotes y escribas. Calculó la altura de las Pirámides marcando la sombra del vértice superior de la Gran Pirámide en el mismo momento en que su sombra midiera lo mismo que su altura. Se cuenta que predijo un eclipse solar lo cual permitió ganar una batalla a su pueblo. Su máximo legado es su teorema de las paralelas y la proporcionalidad.

Pitagoras, siglo VI a.c. pero posterior a Tales y también conocedor de la cultura y conocimientos egipcios fundó tres escuelas una detras de la otra en distintas ciudades ya que contaban con estricta disciplina y secretismo. Afirmaban que la estructura del universo era aritmética y geométrica, por lo que las matemáticas se convirtían en una disciplina fundamental para toda investigación científica. Su mayor aportación, el teorema de pitagoras, $h^2=c^2+c^2$, podría no ser de su autoría, sino de su escuela y todo ello debido a los conocimientos importados de egipto.

Platón, Hizo grandes aportaciones estudiando la proporción aurea y los sólidos geométricos. En su libro timeo atribuye a la geometría un papel protagonista y esencial en los conocimientos humanos llegando a afirmar para sus alumnos "Que no entre aquí quien no sepa de geometría".



Euclides fue un matemático y geómetra griego, que vivió alrededor del siglo IV-III a.C. Se le conoce como "**El Padre de la Geometría**".

En su obra "**Los elementos**" se presenta de manera formal, partiendo únicamente de cinco postulados, el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc.; es decir, de las formas regulares.

1- Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una línea recta.
2- Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
3- Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una circunferencia.
4- Todos los ángulos rectos son iguales.
5- Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

SIGLOS XIX y XX

A principios del siglo XIX, de modo independiente, Gauss, Lobachevsky, János Bolyai y Ferdinand Schweickard lograron construir la geometría hiperbólica o esférica, en definitiva NO EUCLIDEA (plana), a partir del intento de negar el quinto postulado de Euclides y tratar de obtener una contradicción. En lugar de obtener una contradicción lo que obtuvieron fue una curiosa geometría en la que los tres ángulos de un triángulo sumaban menos de 180º sexagesimales (en la geometría euclídea los ángulos de cualquier triángulo suman siempre exactamente 180º).

LUGAR GEOMÉTRICO

Un **lugar geométrico** es un **conjunto de puntos** que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas respecto a otro punto, par de puntos, segmento, recta, circunferencia, plano o conjuntos de estos elementos. Existen Lugares geometricos del plano y lugares geométricos del espacio.

En general "lugar geométrico de los puntos" es sinónimo de "conjunto de puntos que cumplen las siguientes condiciones". De este modo podremos (Y DEBEREMOS) usar "lugar geométrico de los puntos del plano" como una coletilla inicial para definir elementos geométricos, Veamos algunos ejemplos sencillos::

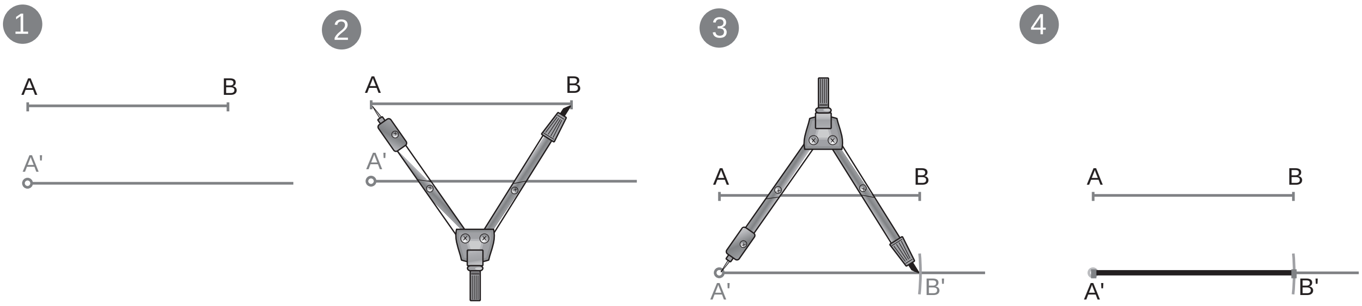
Circunferencia: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto llamado centro.
Mediatriz: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento.
Bisectriz:: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un segmento.
Paralela: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otra recta.
Plano Bisector: Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos planos que se cortan.
Esfera: lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto.

Aunque parece un concepto genérico sencillo y no muy util, es importante interiorizarlo para entender que muchos de los trazados geométricos auxiliares que hacemos para resolver ejercicios, hallar otros lugares geométricos o resolver problemas complejos tienen sus razonamientos cimentados en el concepto de lugar geometrico especifico para cada uno de ellos.

Para realizar operaciones con segmentos se suele emplear siempre el compás para tomar medidas, copiarlas o trasladarlas. También se ha de emplear una regla que puede estar graduada o no, ya que el compás será la herramienta con la que se mide.

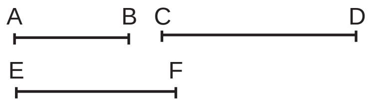
COPIA DE UN SEGMENTO: Dado el segmento AB, copiarlo con la misma magnitud.

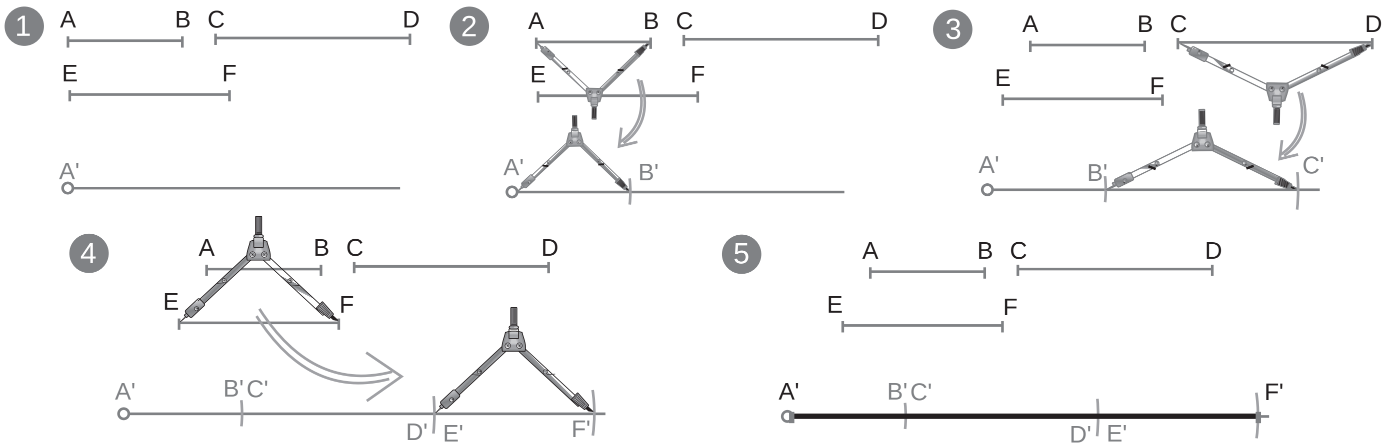
1º- Trazamos una semirecta desde un punto A'.
2º- Tomamos la medida AB con el compás.
3º- Trasladamos la distancia AB sobre la semirecta que hemos trazado. Con la medida tomada anteriormente con el compás haremos centro en el punto A' de la semirecta y la marcaremos obteniendo B'.
4º- Finalmente pasamos a tinta el resultado (IMPORTANTE).



SUMA DE SEGMENTOS: Dados los segmento AB, CD y EF, sumarlos gráficamente.

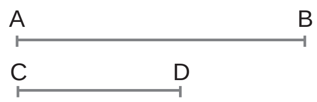
1º- Trazamos una semirecta desde un punto A'.
2º- Tomamos la medida AB con el compás y la copiamos en la semirecta, a partir de A', obteniendo B'. (copiar el segmento AB)
3º- A partir de B' repetimos la operación con el siguiente segmento a sumar (CD).
4º- En este caso tenemos tres segmentos para sumar, repetimos con el último.
5º- La solución es la totalidad d elos segmentos copiados uno detrás de otro, es decir, A'F'. Pasamos a tinta la solución (IMPORTANTE).

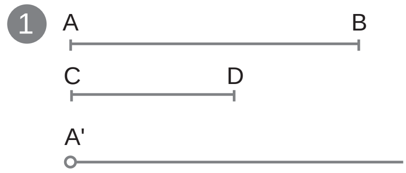


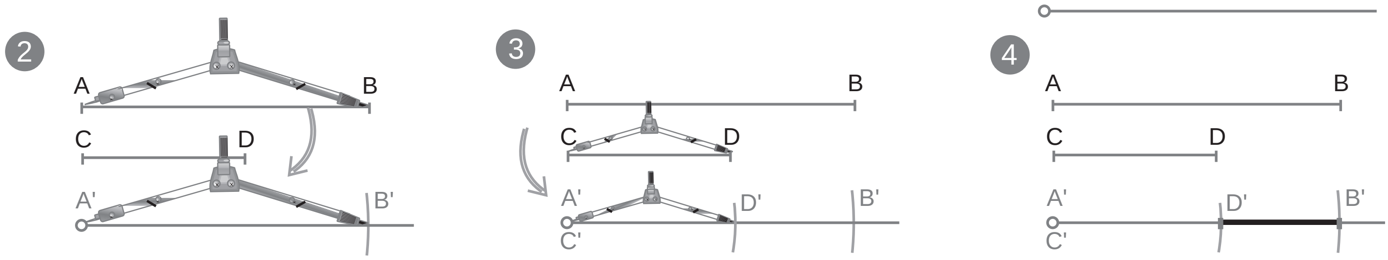


RESTA DE SEGMENTOS: AB - CD,restarlos gráficamente.

1º- Trazamos una semirecta desde un punto A'.
2º- Tomamos la medida AB, el mayor, con el compás y la copiamos en la semirecta, a partir de A', obteniendo B'. (copiar el segmento AB)
3º- A partir de A', de nuevo, repetimos la operación con el segmento CD. Es decir, copiaremos el segmento menor dentro del mayor que ya hemos copiado.
4º- La diferencia entre los dos segmentos (distancia de D' a B') es la solución. La pasamos a tinta.







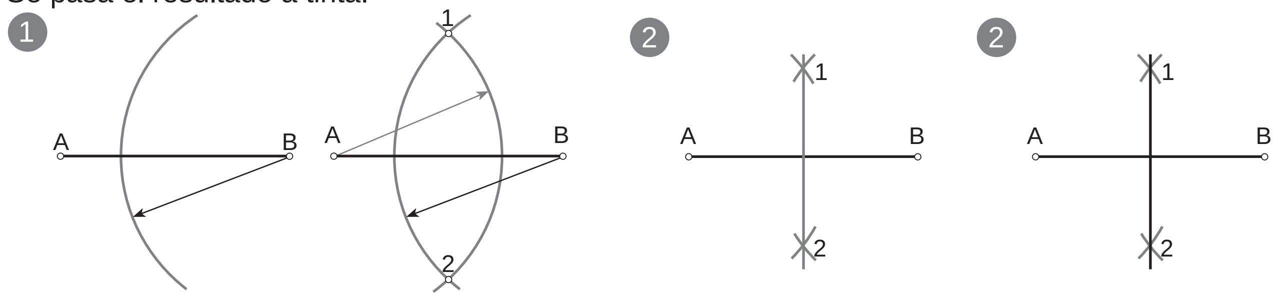
Mediatriz de un segmento:

Dado un segmento AB, hallar la mediatriz.

La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a este por su punto medio. También se puede definir como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento"

Procedimiento:

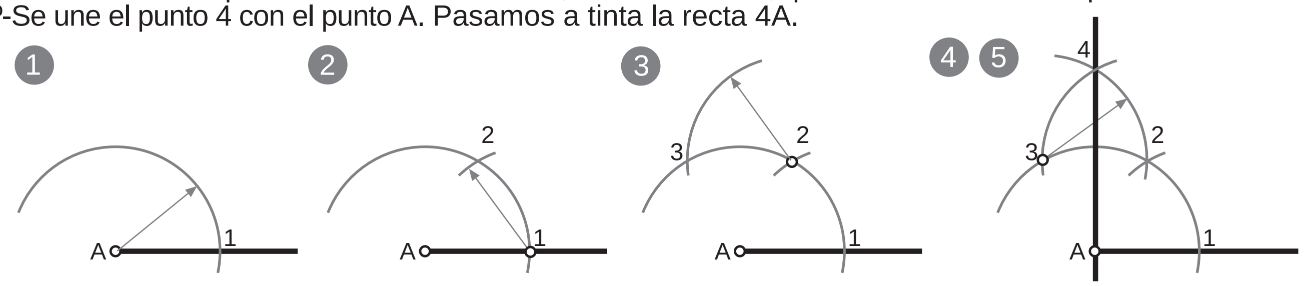
1º- Se trazan dos arcos de igual rádio con centro en ambos extremos A y B. Se obtienen así los puntos 1 y 2 donde ambos arcos se cortan.
2º- Se unen los puntos 1 y 2 para obtener la mediatriz.
3º- Se pasa el resultado a tinta.



Perpendicular a un segmento o semirecta por un extremo: MÉTODO 1

Dado un segmento AB, trazar la perpendicular por el punto A.

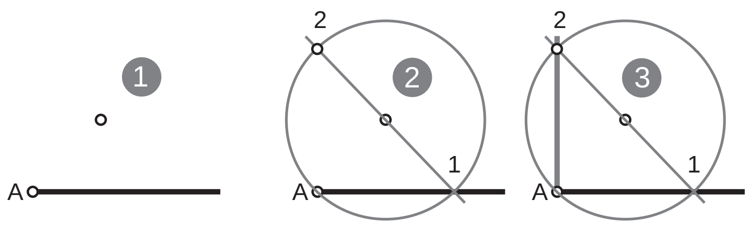
1º-Con centro en A se traza un arco (casi una semicircunferencia) que corta al segmento en el punto 1.
2º-Con centro en el punto 1 se traza otro arco con el mismo radio que corta al anterior arco en el punto 2.
3º-Con centro en el punto 2 y mismo radio se traza otro arco que corta al primero en el punto 3.
4º-Con centro en el punto 3 trazamos otro arco, de mismo radio, que corta al último en el punto 4.
5º-Se une el punto 4 con el punto A. Pasamos a tinta la recta 4A.



Perpendicular a un segmento o semirecta por un extremo: MÉTODO 2

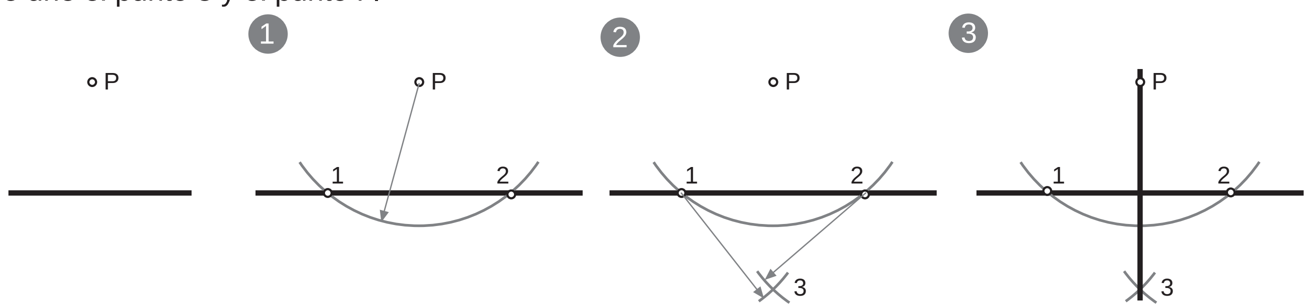
Dado un segmento AB, trazar la perpendicular por el punto A.

1º- Elegimos un punto O desde el que hacer una cir. que pase por A y corte a la recta en otro pto, 1.
2º-Trazamos recta que pasa por 1 y por O, obtenemos el pto. 2.
3º- Unimos 2 con A.



Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella:

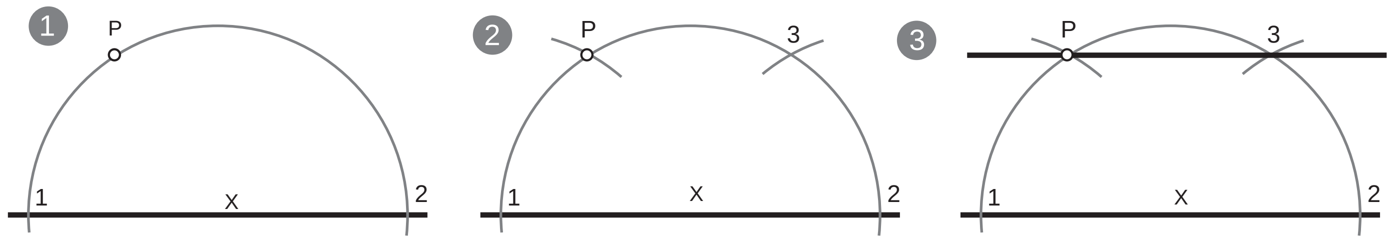
1º-Con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos: 1 y 2.
2º-Con centro en los puntos 1 y 2, se trazan dos arcos de radio mayor a la mitad de la distancia entre ellos.Donde ambos arcos se cortan obtenemos el punto 3.
3º-Se une el punto 3 y el punto P.



Paralela a una recta por un punto exterior, dos métodos:

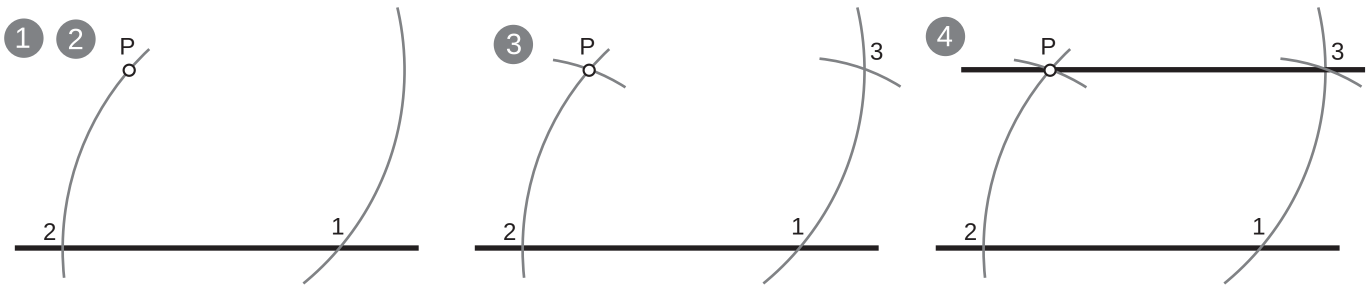
METODO 1

1º- Se elige un punto X centrado en la recta como centro y se traza una semicircunfenerncia de radio XP que la corta en dos puntos: 1 y 2.
2º- Con centro en el punto 1 se toma el radio 1P y desde el punto 2 se traza un arco que corta al primero en el punto 3.
3º- Seune el punto 3 con P.



METODO 2

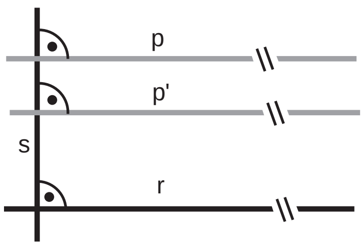
1º- Con centro en P se traza un arco que corta a la recta en el punto 1
2º- Con centro en el punto 1 e igual radio se traza un arco que pasa por el punto P y corta a la recta en el punto 2.
3º- Con el compas se mide la distancia 2P y se copia sobre el otro arco desde el punto 1 obteniendo así el punto 3.
4º- Se une el punto 3 con P.



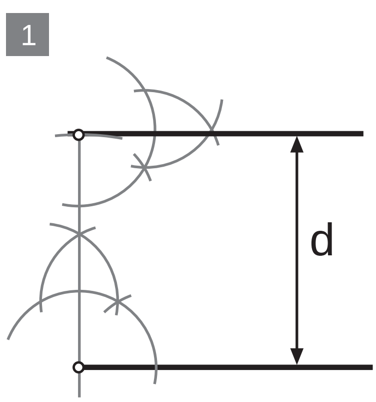
Paralela a una recta a una distancia dada (d) :

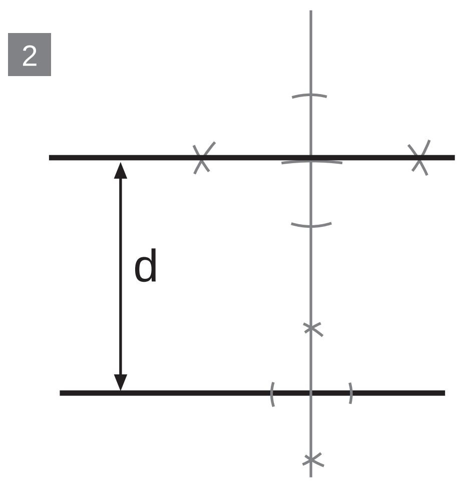
La distancia entre una recta y otra es la medida que se toma sobre una recta perpendicular a ambas.

Si tenemos una recta (r), y una recta prependicular (s), cualquier recta perpendicular (p) a (s) será paralela a (r).



Por lo tanto podemos emplear cualquiera de los metodos de "perpendicularidad" para resolver este problema. A la derecha te mostramos dos de ellos.



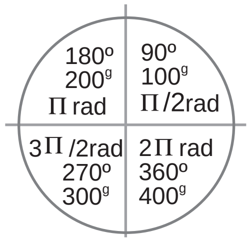


ÁNGULO: Es la porción de plano comprendida entre dos semirectas llamadas lados que parten de un punto en común llamado vértice.

UNIDADES DE MEDIDA: Existen varias unidades para medir los ángulos:

- Radianes: una circunferencia entera mide 2Π radianes.
- Grados centesimales: Una circunferencia entera mide 400^g.
- Grados sexagesimales: Una circunferencia entera mide 360º.

Generalmente en geometría se emplean los grados sexagesimales.



TIPOS DE ÁNGULOS SEGÚN SU MAGNITUD

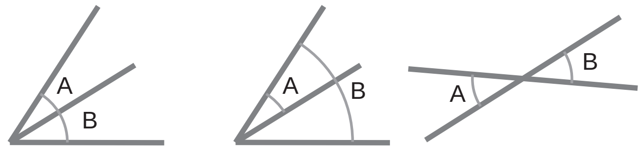
Llano	Obtuso	Recto	Agudo	Cóncavo	Convexo
= 180º	+ de 90º	= 90º	- de 90º	- de180º y + de 0º	+ de 180º y - de 360º

RELACIONES ANGULARES

Relaciones angulares SEGÚN SU POSICIÓN

Ángulos Adyacentes: Son aquellos que comparten un lado y el vértice, pero no tienen ningún punto en común.
Ángulos Consecutivos: Son los que comparten un vértice y un lado (se superponen).
Ángulos Opuestos: Son los formados por semirectas opuestas.

ADYACENTES CONSECUTIVOS OPUESTOS



Relaciones angulares SEGÚN SU MAGNITUD

Ángulos Complementarios: Son aquellos que suman 90º
Ángulos Suplementarios: Son los que suman 180º.
Ángulos Conjugados: Son los que suman 360º.

ADYACENTES (no tienen por qué serlo)

COMPLEMENTARIOS SUPLEMENTARIOS

ÁNGULOS EN LOS POLÍGONOS

Ángulo Interior (o interno):Es el formado, dentro del polígono, por los lados adyacentes o consecutivos.
Ángulo Exterior(o externo):Es el formado, fuera del polígono por un lado y la prolongación del adyacente o consecutivo .

ÁNGULO INTERIOR ÁNGULO EXTERIOR

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

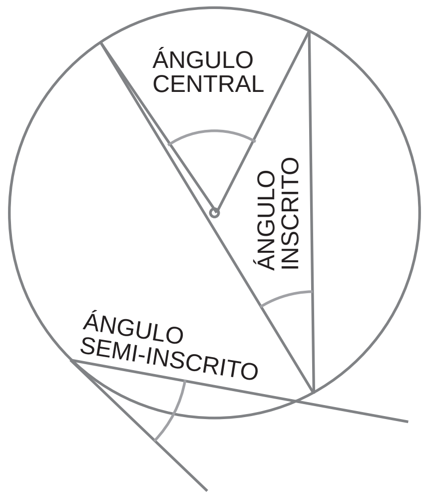
Ángulo central:Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados la cortan en dos puntos.
Su amplitud es igual a la del arco que abarca

Ángulo Inscrito: Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados la cortan en dos ptos.
Su amplitud es igual a la mitad del arco que abarca

Ángulo Semi-inscrito: Su vértice está en la circunferencia, uno de sus lados es tangente a ella, siendo el vértice el pto. de tangencia, el otro lado la corta.

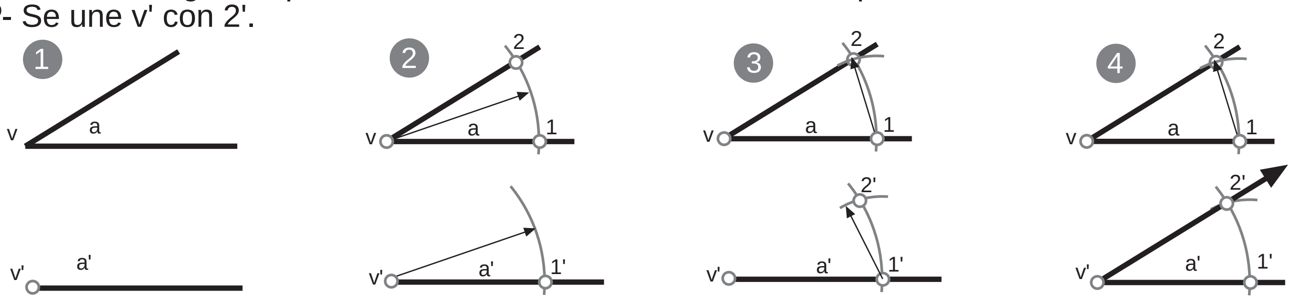
Ángulo interior: Su vértice está dentro de la circunferencia.
Su amplitud es igual a la suma de la amplitud del arco que abarcan sus lados más la aplitud del arco que abarcan sus prolongaciones

Ángulo Exterior: Su vértice está fuera de la circunferencia.
Su amplitud es la mitad de la diferencia de los dos arcos que abarcan sus lados sobre dicha circunferencia.



COPIA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dado un ángulo (a) trazar otro ángulo (a') igual.

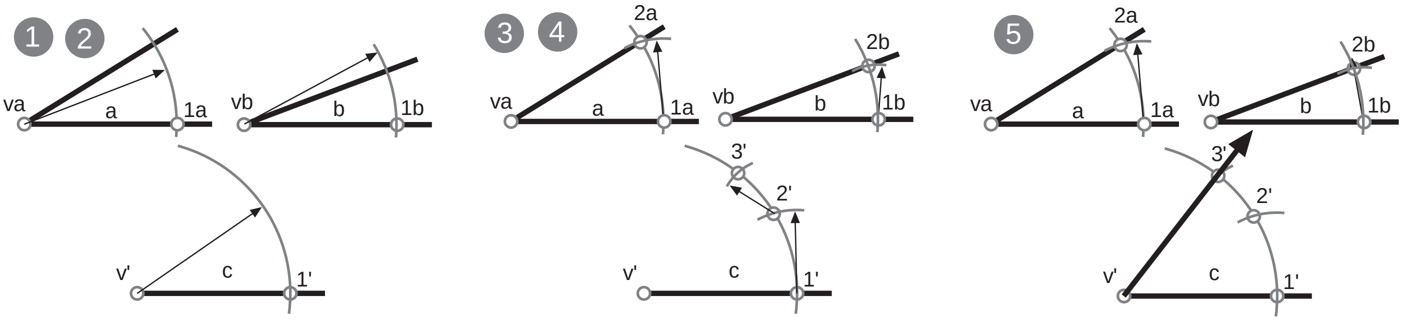
1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo copiado.
2º- Con centro en el punto v se traza un arco de radio cualquiera que corta los lados de este en los puntos 1 y 2. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1 del ángulo dado, se mide con el compas la distancia desde 1 hasta 2. En el nuevo ángulo copiado con centro en 1' se traza un arco que corte al anterior obteniendo 2'
4º- Se une v' con 2'.



SUMA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dados los ángulos (a) y (b) trazar otro ángulo (c) = (a+b)

Se trata de copiar un ángulo encima del otro, compartiendo ambos un lado que finalmente no será parte del resultado.

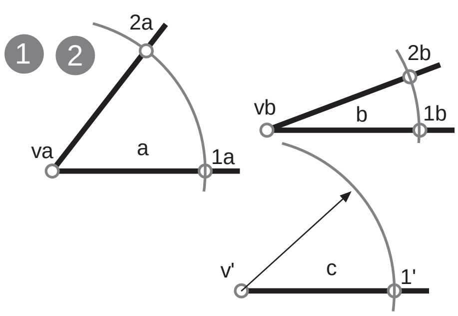
1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo resultado a+b.
2º- Con centros en los puntos (va) y (vb), se traza un arco de radio cualquiera pero igual, que corta ambos lados de los ángulos en los ptos 2a y ab. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1a, se mide con el compás la distancia desde 1a-2a, colocándola en el resultado desde 1', obteniendo así el pto. 2'.
4º- Se mide, con compás, la distancia 1b-2b.Desde 2' trazamos un arco de radio 1b-2b para obtener 3'.
5º- Se une v' con 3'.

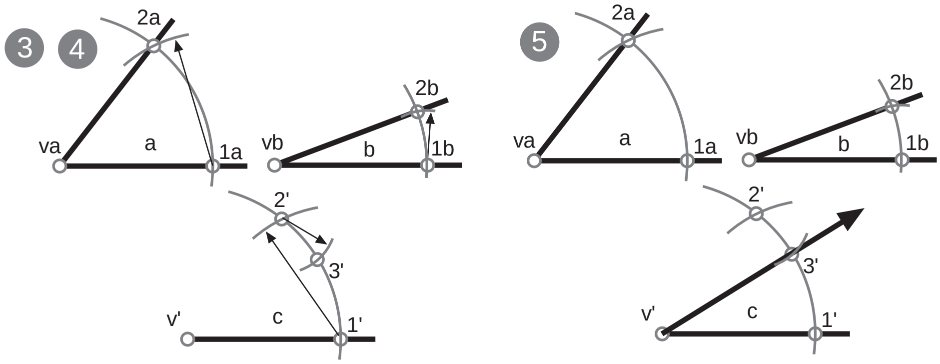


RESTA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dados los ángulos (a) y (b) trazar otro ángulo (c) = (a-b)

Se trata de copiar el ángulo menor dento del mayor, compartiendo ambos un lado que finalmente no será parte del resultado.

1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo resultado a-b.
2º- Con centros en los puntos (va) y (vb), se traza un arco de radio cualquiera pero igual, que corta ambos lados de los ángulos en los ptos. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1a, se mide con el compás la distancia desde 1a-2a, colocándola en el resultado desde 1', obteniendo así el pto. 2'.
4º- Se mide, con compás, la distancia 1b-2b.Desde 2' trazamos un arco, situado entre 1' y 2', de radio 1b-2b para obtener 3'.
5º- Se une v' con 3'.





BISECTRIZ DE UN ÁNGULO:

Es la semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales pasando por el vértice.
Todos los puntos de la bisectriz equidistan (están a la misma distancia)de los lados del ángulo.

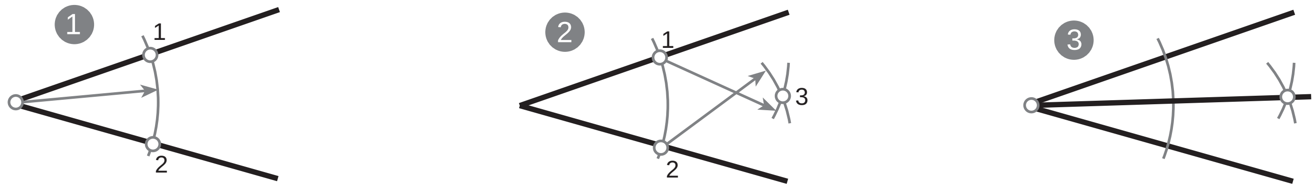
La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo.

TRAZADO DE LA BISECTRIZ: Dado un angulo a, trazar su bisectriz.

1º- Con centro en el vértice y un radio cualquiera (suficientemente amplio) se traza un arco que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2.

2º- Con centros en los puntos 1 y dos se trazan dos arcos de igual radio (mayor a la mitad de la distancia entre 1 y 2) que se cortán en el punto 3.

3º- Se une el punto 3 con el vértice del ángulo dado.



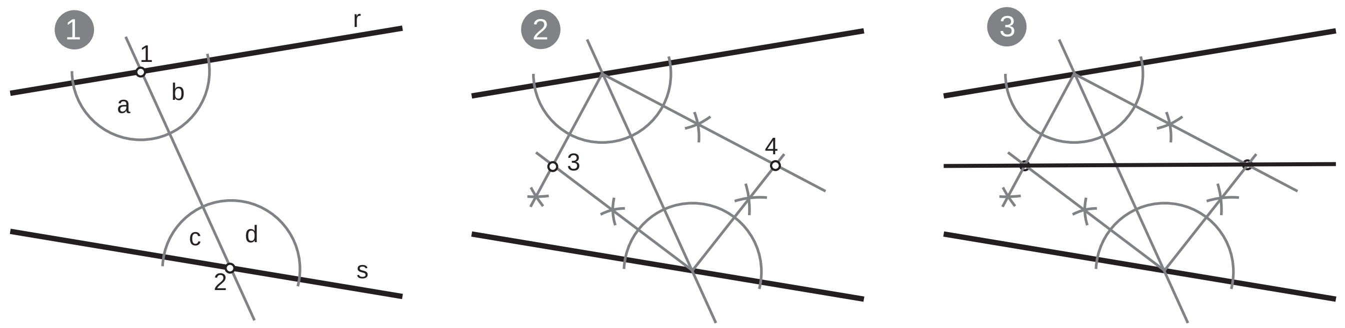
TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DEL QUE SE DESCONOCE EL VÉRTICE:
Dadas dos rectas, no paralelas: r y s, trazar su bisectriz.
Existen dos métodos para resolver este problema.

METODO 1: Recta que corta a ambos lados del ángulo.

1º- Se traza una recta que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2. De este modo, 1 y 2 se convierten en vértices de 4 ángulos: a b, c y d

2º- Se trazan las bisectrices de los angulos a, b, c y d. Las bisectrices se cortan en dos puntos: 3 y 4

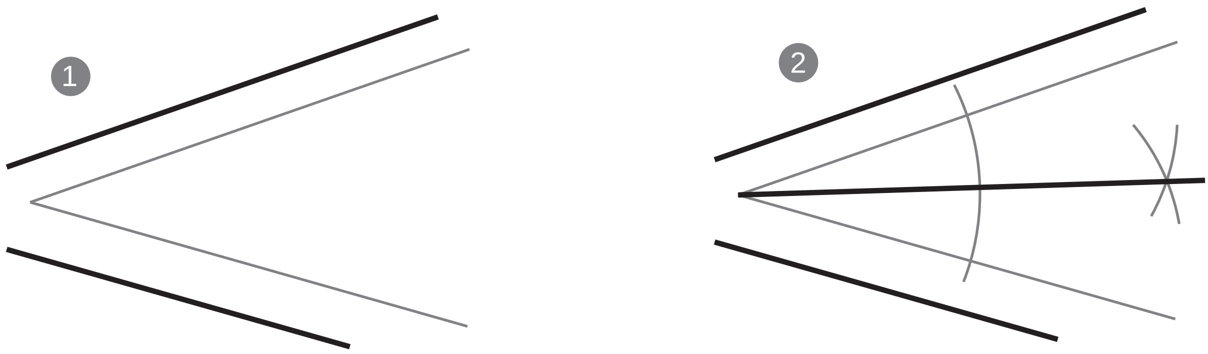
3º- Se une el punto 3 con el 4.



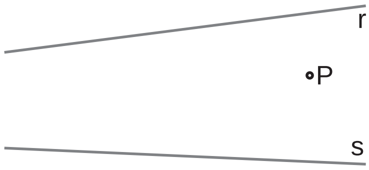
MÉTODO 2: Comprimir el ángulo para obtener el vértice.

1º- Se trazan dos rectas paralelas a las rectas r y s, ambas a la misma distancia de las originales. Así obtenemos un nuevo ángulo del que si vemos su vértice.

2º- Se traza la bisectriz del nuevo angulo.



Dadas dos rectas, r y s, lados de un ángulo cuyo vértice esta fuera de los limites del papel, trazar la recta concurrente con dicho vértice que pasa por un punto dado p.

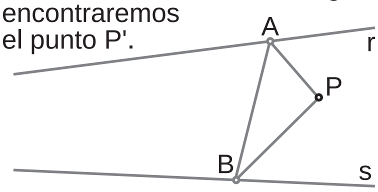


Para resolver este problema emplearemos las propiedades de una tranformación geométrica: LA HOMOTECIA.

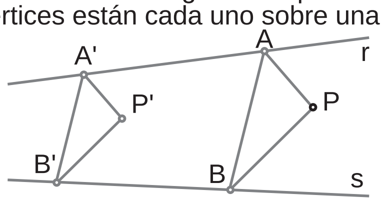
LA HOMOTECIA consiste en una transformación en la que todos los puntos homotéticos estan alineados con el centro de homotecia y todas las rectas homotéticas son paralelas.

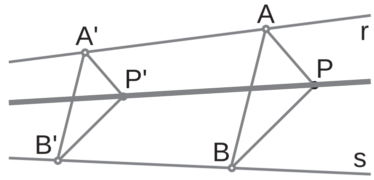
Con estas propiedades podemos convertir el punto p en el vértice de un triángulo cualquiera cuyos otros dos vértices están cada uno sobre una de las dos rectas.

A partir de aquí trazamos otro triángulo semejante (misma forma pero distinto tamaño o área) cutos lados son paralelos.
Empezaremos trazando una paralela al segmento AB, que nos dará los puntos A' y B' a partir de los cuales trazaremos paralelas a los segmentos AP y BP.
En la intersección de los segmentos paralelos a AP y BP encontraremos
el punto P'.



A-A', B-B' y P-P' son pares de puntos homotéticos y deben de estar alineados con el cento de homotecia del que no disponemos. Igualmente son homotéticos los respectivos segmentos que son paralelos.



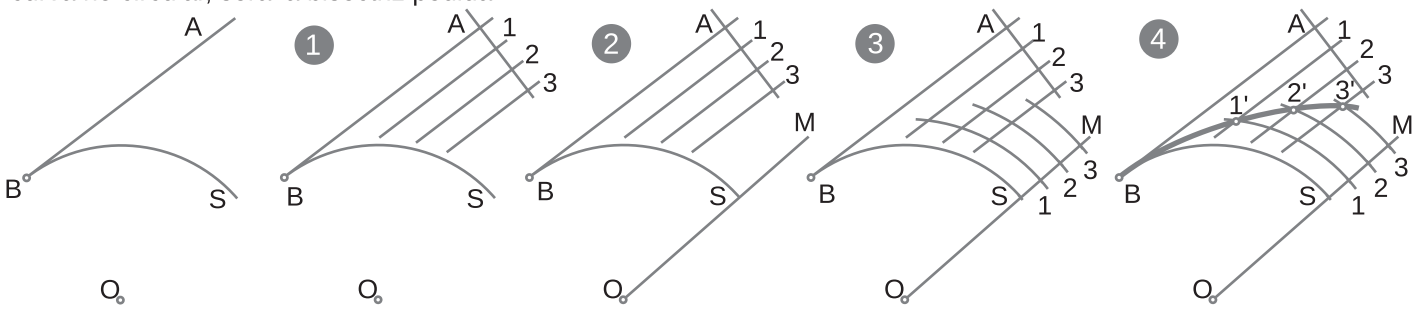


Uniendo P y P' obtenemos la recta (radiación de la homotecia) que concurre en el vértice que producen las rectas
r y s (también radiaciones de la homotecia. Estas tres rectas contienen pares de puntos homotéticos alineados con el vértice del ángulo producido por
r y s (centro de homotecia).

CONSTRUCCIÓN DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO MIXTILÍNEO.
Un ángulo mixtilineo es aquel con un lado recto y un lado curvo.

Datos: Recta AB y arco BS de centro en O.
Incógnita: Linea curva no circular que pasa por 1', 2' y 3'.

Procedimiento*:*
1º- Se trazan la perpendicular a la recta AB y se divide en n número de partes iguales señalando los puntos 1, 2, 3 por los cuales se pasarán paralelas a la recta AB.
2º- Con centro en O, se traza un radio cualquiera OM y se prolonga.
3º- A partir de S se llevan n número de divisiones iguales a las anteriores 1, 2, 3 por cuyos puntos se trazan arcos concéntricos al dado O.
4º- Los arcos se cruzaran con las paralelas anteriores, determinando los puntos 1', 2' y 3', que unidos por una linea curva no circular, será la bisectriz pedida.

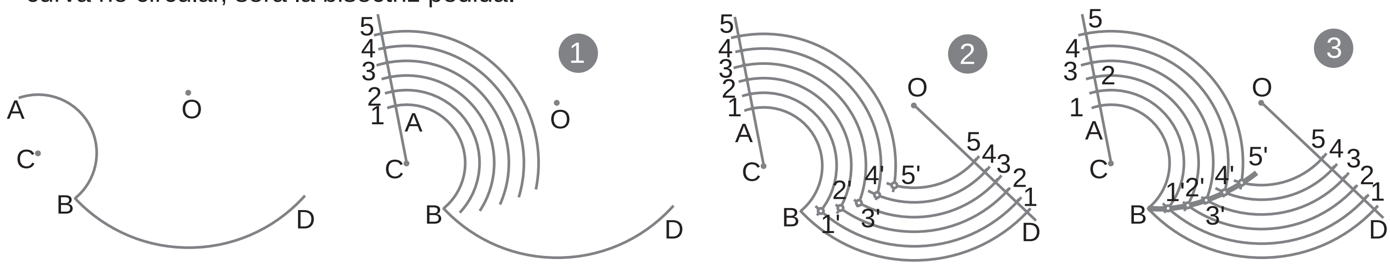


CONSTRUCCIÓN DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO CURVILÍNEO.
Un ángulo Curvilineo es aquel con dos lados curvos.

Datos: Arco AB de centro C y arco BD de centro en O.
Incógnita: Linea curva no circular que pasa por 1', 2' y 3'.

Procedimiento*:*

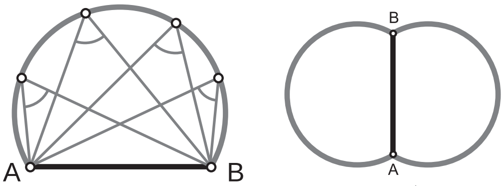
1º- Desde C se traza el radio CA prolongandolo, dividiendo la prolongación en un número de partes iguales señalando los puntos 1, 2, 3 por los cuales se pasarán arcos concéntricos a la recta AB.
2º- Con centro en O, se traza un radio cualquiera OD y se prolonga, A partir de D se llevan un número de divisiones iguales a las anteriores 1, 2, 3 por cuyos puntos se trazan arcos concéntricos al dado O.
3º- Los arcos se cruzaran con las paralelas anteriores, determinando los puntos 1', 2' y 3', que unidos por una linea curva no circular, será la bisectriz pedida.



ARCO CAPAZ:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que ven a los extremos de un segmento con la misma magnitud angular.

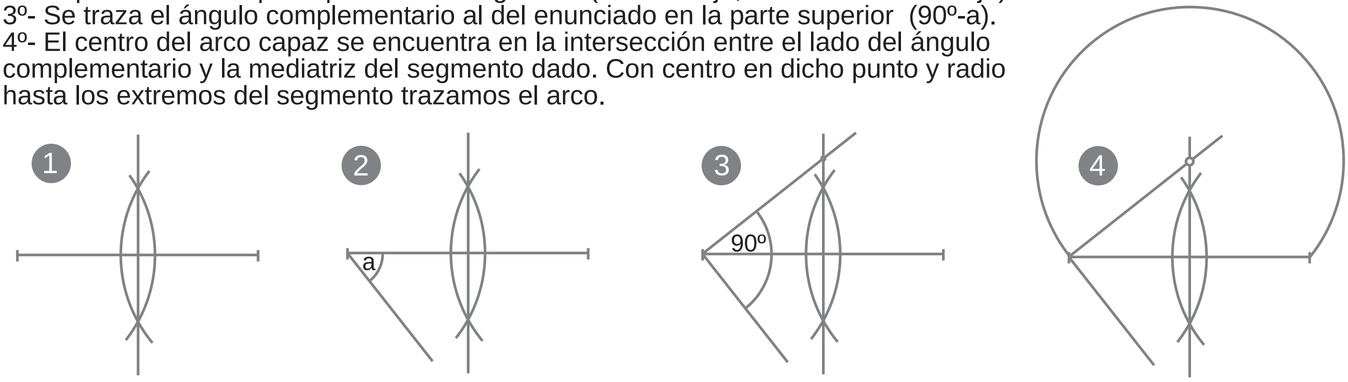
Arco capaz de 60º del seg. AB



CONSTRUCCIÓN:

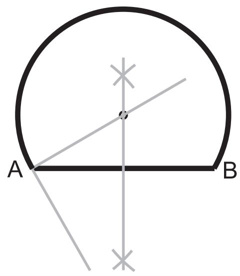
Hallar el arco capaz de los ángulos de aº del segmento dado:

1º- Trazamos la mediatriz del segmento dado
2º- Copiamos el ángulo a a partir con tomándo como vértice un extremo del segmento. Lo copiaremos en la parte posterior al segmento (hacia abajo, como indica el dibujo).
3º- Se traza el ángulo complementario al del enunciado en la parte superior (90º-a).
4º- El centro del arco capaz se encuentra en la intersección entre el lado del ángulo complementario y la mediatriz del segmento dado. Con centro en dicho punto y radio hasta los extremos del segmento trazamos el arco.

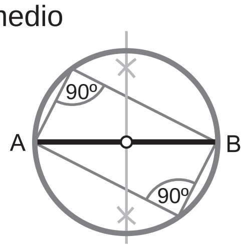


El planteamiento de la construcción del arco capaz está relacionado con los conceptos de ángulo central y ángulo inscrito de la circunferencia. EL ÁNGULO INSCRITO SIEMPRE ES LA MITAD DEL ÁNGULO CENTRAL.

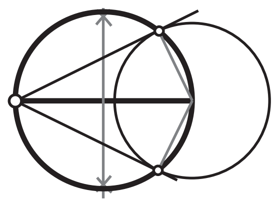
Arco capaz de 60º del seg. AB



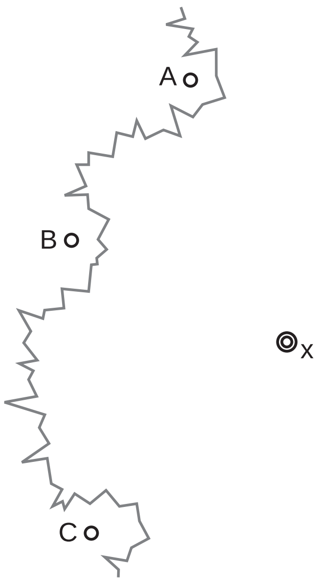
Arco capaz de 90º del seg. AB es la circunferencia con centro pto. medio

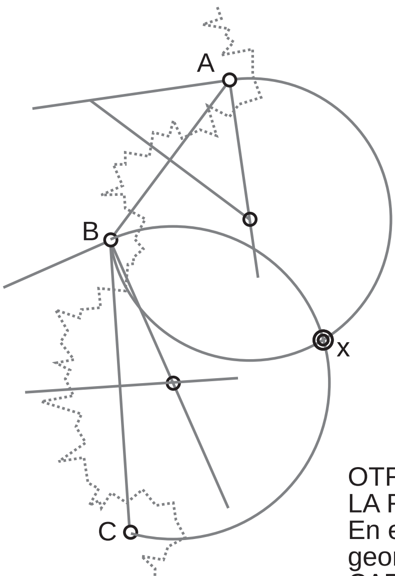


Arco capaz de 90º, la circunferencia,se emplea en problemas de tangencias



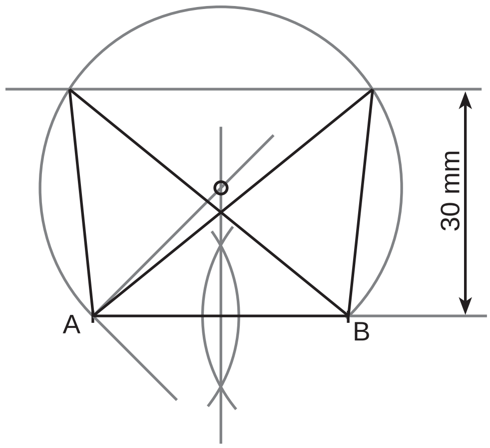
Desde el barco (x) se ven los faros A y B con una magnitud angular de 45º y los faros B y C con una magnitud angular de 75º.
¿Dónde se encuentra el barco (x)?





Para resolver este problema hemos trazado el arco capaz de 45º del segmento AB y el arco capaz de 70º del segmento BC

Conocido el lado AB, y la altura h=30 mm trazar los dos posibles triángulos cuyos vétrices popuestos al lado AB miden 45º.

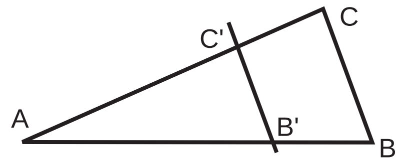


OTRO DE LOS USOS BÁSICOS DEL ARCO CAPAZ ES LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS
En este caso ha hecho falta emplear dos lugares geométricos: La paralela a 30 mm de la base y el ARCO CAPAZ de 45º. Para este problema existen dos soluciones.

TEOREMA DE THALES DE MILETO

Toda recta paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos lados, determina otro triángulo semejante al triángulo inicial.

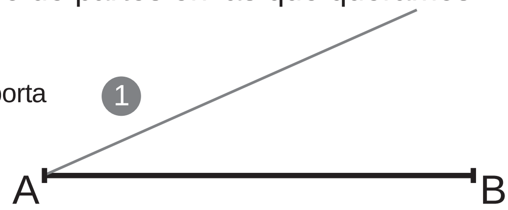
$$CB/C'B'=AC/AC'=AB/AB'$$

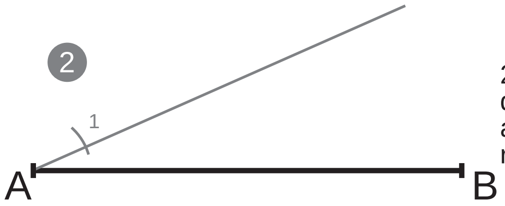


Si se cortan dos rectas concurrentes con un haz de rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n (7) partes iguales:
El procedimiento siempre es el mismo aunque varie el númenro de partes en las que queramos dividir el segmento.

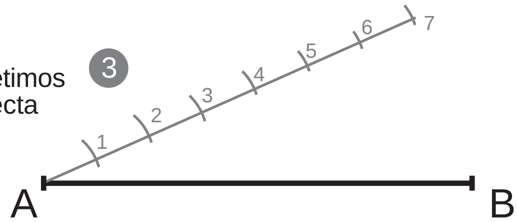
1º- Desde un extremodel segmento dado trazamos una recta auxiliar. No importa la abertura del ángulo que esta forme con el segmento dado.

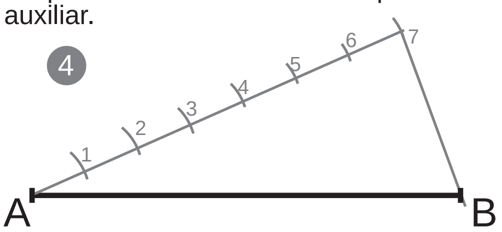




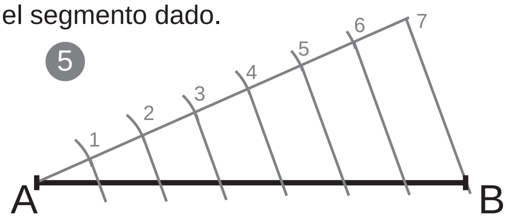
2º- Tomamos un radio de compás (no importa la abertura del compás, solo que quepa tantas veces como divisiones nos pide el problema sobre la recta auxiliar) y con centro en el vértice del ángulo trazamos una marca sobre la recta auxiliar.

3º- Con centro en esa primera marca, y con el mismo radio de compás repetimos la operacion hasta tener tantas partes como nos pide el problema en la recta auxiliar.

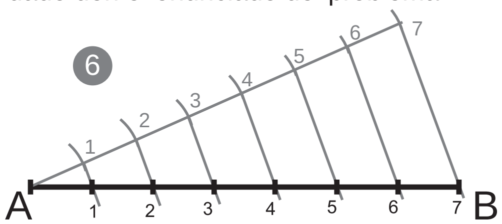




4º- Trazamos un segmento que une la ÚLTIMA DIVISIÓN de la recta auxiliar con EL EXTREMO B del segmento dado.



5º- Trazamos paralelas a la última recta pasada. estas pasan por las divisiones que hemos trazado sobre la racta auxiliar y cortan al segmento dado den el enunciado del problema.

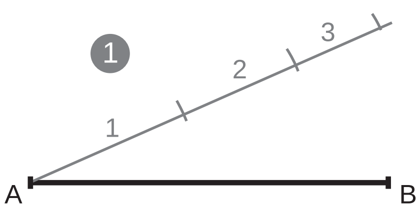


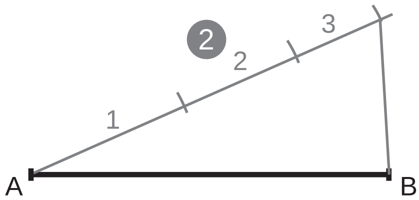
6º- Los puntos de corte de las paralelas con el segmento dado son la solución, las divisiones del segmento en el nº de partes que pedía el enunciado.

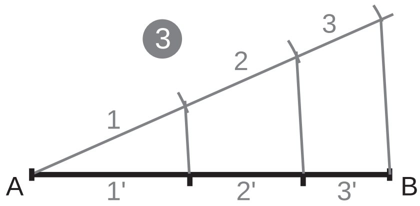
División de un segmento AB en PARTES PROPORCIONALES a los segmentos 1, 2 y 3 DADOS:

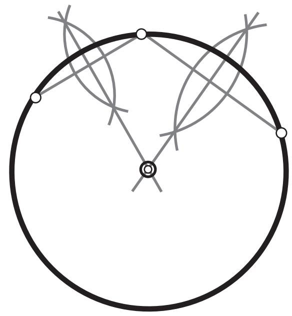
El procedimiento es el mismo que el anterior. Esta vez en lugar de dividir el segmento auxiliar en partes iguales copiaremos, uno tras otro los tres segmentos dados.

1º- A partir del punto A trazamos un segmento auxiliar sobre el cual copiamos con el compás las magnitudes de los segmentos según los cuales se quiere dividr el segmento AB.
2º- Unimos el último punto del segmento auxiliar (con los tres segmentos copiados uno tras otro con el extremo B del segmento a dividir proporcionalmente.
3º- trazamos paralelas al segemento trazado de modo que el segmento Ab queda dividido en partes proporcionales los segmentos dados.







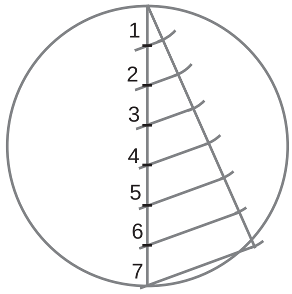


Un problema básico de tangencias "circunferencia que pasa por tres puntos" se resuelve trazando dos segmentos empleando como extremos los puntos dados y trazando sus dos mediatrices para obtener el centro de la círcunfencia y así poder trazarla.

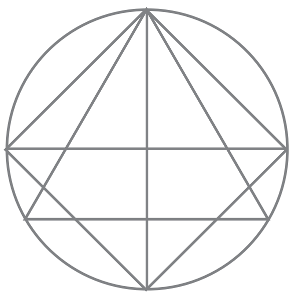
Este principio se puede usar a la inversa para determinar el centro no visible de una circunferencia dada. Es decir, trazar dos cuerdas de circunfernecia y hallando sus mediatrices, el punto donde ambas mediatrices se cortan es el centro.

RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

En geometría plana entendemos por "rectificación" determinar sobre una linea recta la longitud de la circunferencia. También se rectifican los arcos o porciones de circunferencias. La longitud de una circunferencia se expresa de forma aritmética como L=2 r de forma exacta Sin embargo este problema no se puede resolver gráficamente de forma exacta, aunque existen multitud de métodos aproximados.

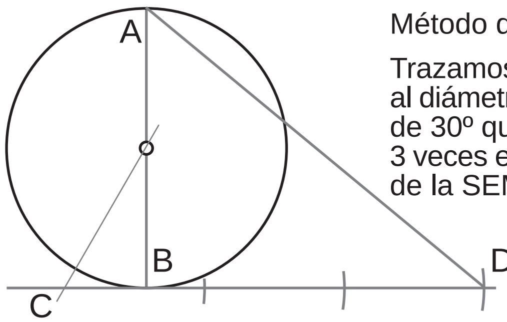


Dividimos el diámetro en siete partes iguales de modo que la rectificación es tres veces el diámetro más 1/7 parte de este.



Método de Mescheroni:

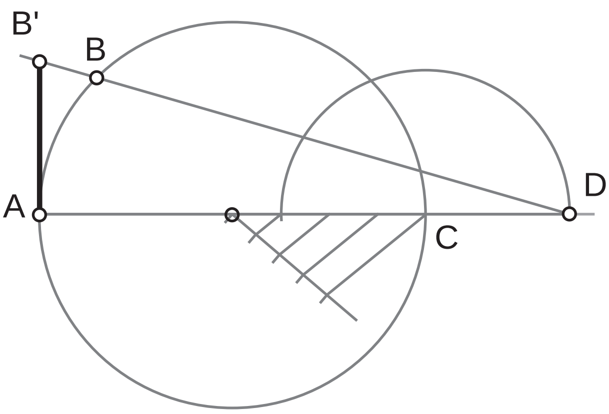
Inscribimos un Triángulo equilátero y un cuadrado en la circunferencia, la rectificación corresponde con dos lados del cuadrado más dos del tiángulo inscritos.



Método de Kochanskyi:

Trazamos un diámetro vertical AB.Por el punto B trazamos perpendicular al diámetro. Con vértice el centro de la circunferencia trazamos un ángulo de 30º que corta en C a la perpendicular al diámetro.Desde C copiamos 3 veces el radio de la circunferencia para obtener D. AD es la rectificaci'on de la SEMICIRCUNFERENCIA.

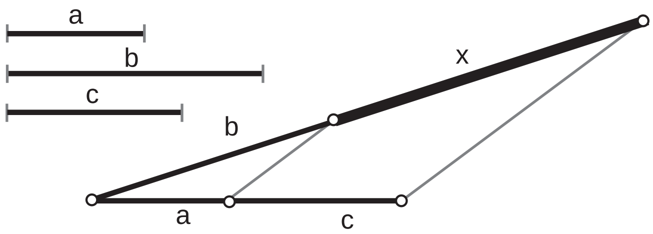
RECTIFICACIÓN DE UN ARCO(AB) DE CIRCUNFERENCIA MENOR A UN CUADRANTE



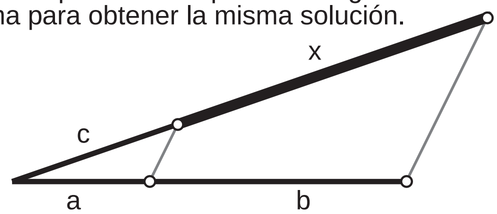
1º- Encontramos el centro del arco (dos cuerdas y dos mediatrices) y trazamos la circunferencia completa.
2º- Trazamos el diámetro AC.
3º- Dividimos el rádio opuesto OC en cuatro partes iguales.
4º- Con centro en C llevamos 3/4 partes del radio OC fuera de la circunferencia sobre la prolongación del diámetro.
5º- Trazamos la recta DB.
6º- Trazamos desde A una perpendicular al diámetro AC.
7º- El segmento AB' es la rectificación del arco AB.

SEGMENTO CUARTO PROPORCIONAL (x) A OTROS TRES (a, b, c)

Dados tres segmentos, se busca otro (d) que verifique la siguiente igualdad a/b=c/x

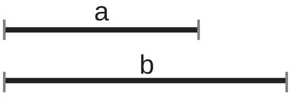


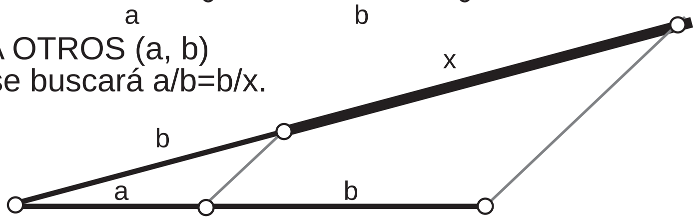
Támbien podremos disponer los segmentos de la siguiente forma para obtener la misma solución.



SEGMENTO TERCERO PROPORCIONAL (x) A OTROS (a, b)

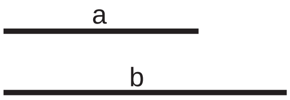
Cuando los medios o los extremos son iguales se buscará a/b=b/x.

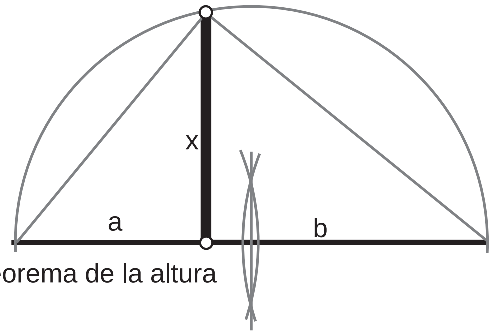




SEGMENTO MEDIO PROPORCIONAL (x) A OTROS DOS (a,B)

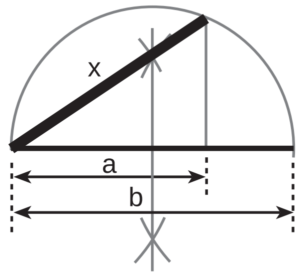
Resulta como derivación del teorema de pitágoras.Dados los segmentos (a) y (b) buscamos otro (x) que cumpla: a·b=x^2.





Teorema de la altura

Teorema del cateto



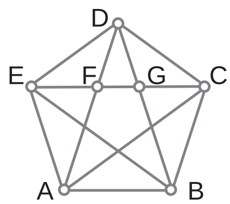
SECCIÓN AUREA DE UN SEGMENTO:

La sección aurea de un segmento es un punto que lo divide en dos partes de tal modo que:

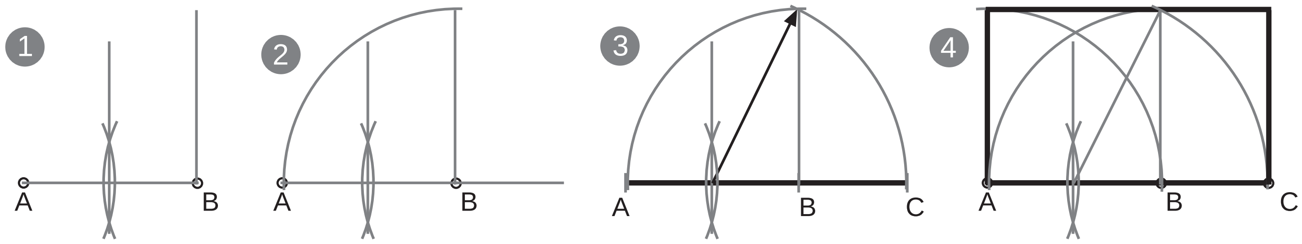
AC / AB = AB / BC = Φ = 1'6180...

Φ tiene relación directa con el las medidas del pentágono regular y estrellado, asi como con la suceción de fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13...

1,618
Φ
AB/BD
EF/EF

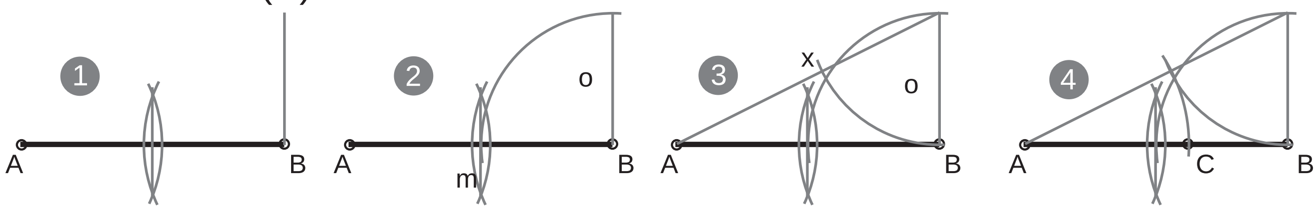


SEGMENTO AUREO (AC) de otro(AB), RECTÁNGULO AUREO:



1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio AB trasladamos la medida del segmento sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto medio del segmento y radio hasta el extremo superior de la perpendicular giramos la distancia sobre la prolongación del segmento AB hayando C.
4º- Para trazar el rectángulo aureo construimos el rectángulo de lado menor AB y lado mayor AC.

DIVISIÓN AUREA (C) DE UN SEGMENTO AB

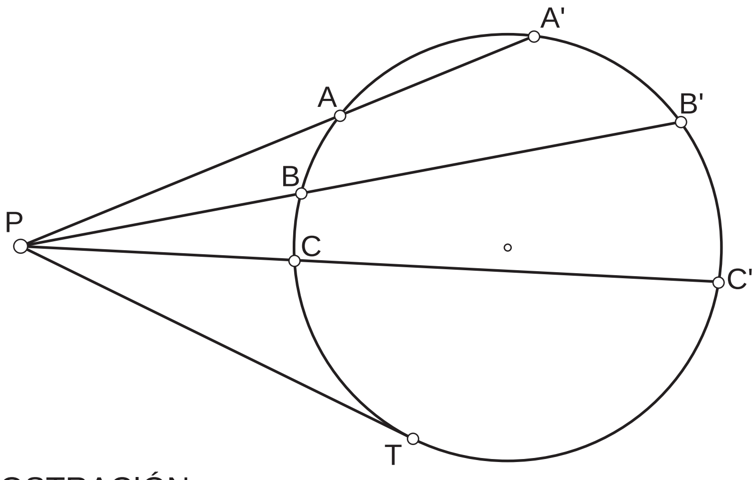


1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio Bm trasladamos la medida Bm sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto (o) y radio oB giramos la distancia sobre el segmento Ao, obtenemos x.
4º- Con centro en A y radio Ax giramos la medida sobre el segmento AB obteniendo C.

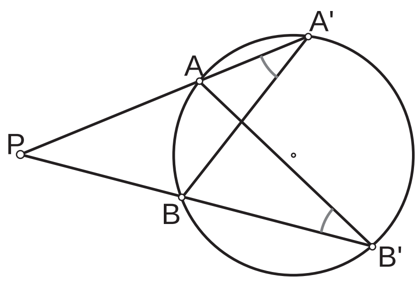
PROPORCIONALIDAD INVERSA: Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Si fijamos un punto P en el plano y desde este trazamos secantes a una circunferencia, la intersección de las distintas secantes producirá dos puntos A-A', B-B', C-C'...
El producto de las distancias de P a los otros dos puntos es constante e igual al cuadrado de la distancia de P al punto de tangencia con la circunferencia .

$\boxed{PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = K = PT^2}$



DEMOSTRACIÓN



Si desde P trazamos dos secantes cualesquiera PAA' y PBB', los triángulos PAB' y PBA' son semejantes ya que los ángulos en A' y B' tienen la misma magnitud.

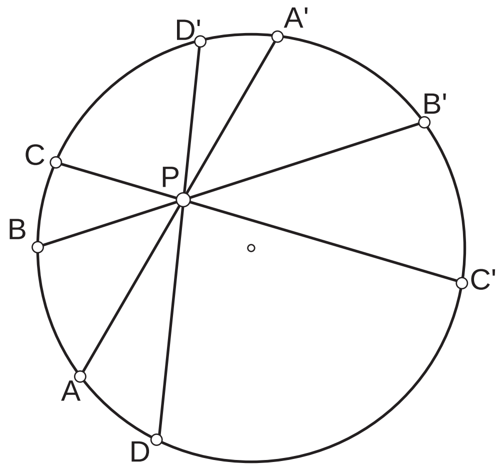
Por tanto:

PA/PB = PB'/PA', de donde $\boxed{PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = K}$

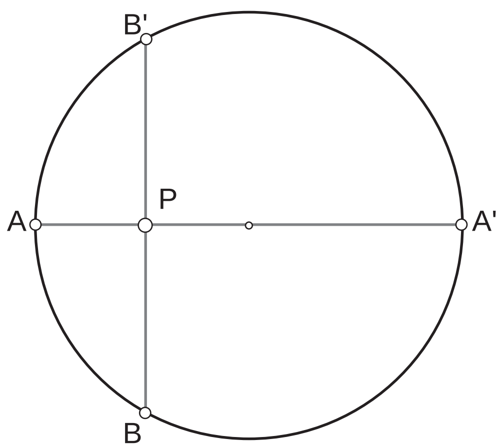
POTENCIA NEGATIVA

Si situamos el punto P en el interior de la circunferencia el producto de las distancias del punto a los extremos de las secantes (cuerdas de la circunferencia) también sera constante, pero con valor NEGATIVO.

$\boxed{PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = -K}$



RELACIÓN DE LA POTENCIA CON LA MEDIA PROPORCIONAL



En esta ocasión situamos el punto P en el interior de la circunferencia y esta vez trazamos una secante que pase por el centro (un diámentro) obteniendo los puntos A y A' y desde P trazamos una cuerda prependicular al diámetro cuyos puntos de intersección son B y B'.

De este modo deducimos:

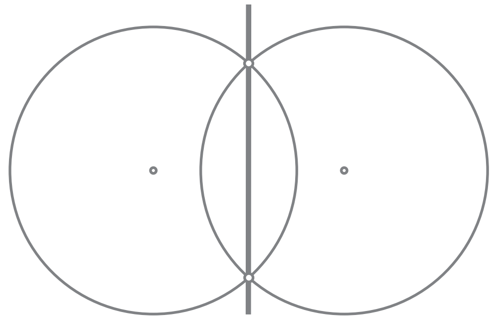
$PA \cdot PA' = PB.PB'$ $\quad PA \cdot PA' = PB^2$ Teorema de la altura

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

El Eje Radical es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias.

- Es una recta perpendicular al segmento que une los dos centros de las circunferencias.
- Pasa por el punto medio del segmento determinado por los puntos de tangencia en una recta tangente a ambas circunferencias.

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS SECANTES

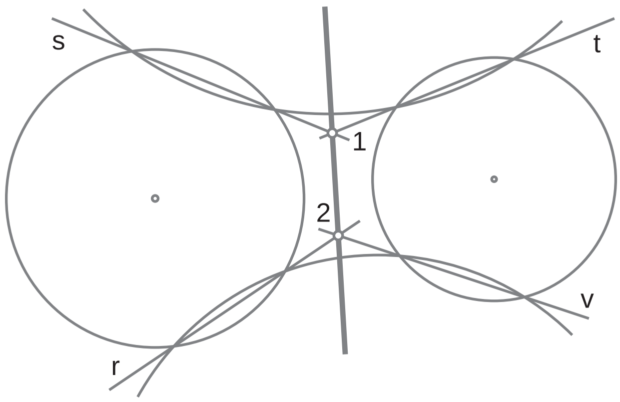


En este caso el eje radical se encuentra definido por los dos puntos de intersección de las circunferencias.

Esta circunstancia nos puede ayudar a hallar el eje radical de circunferencias que no son secantes trazando una circunferencia auxiliar secante a ambas.

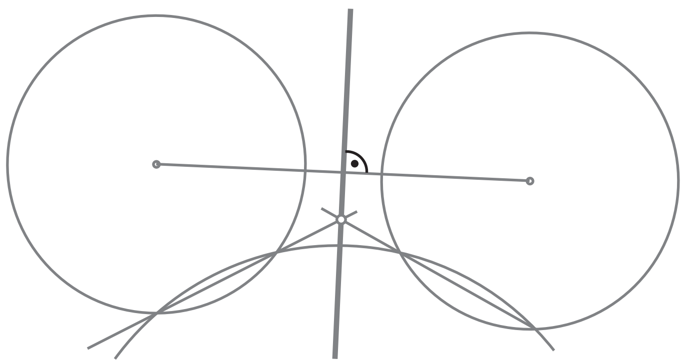
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

Hay varias formas de hallar el eje radical en estos casos, todas ellas se apoyan en las dos características principales y en el método para hallarlo cuando las circunferencias son secantes.

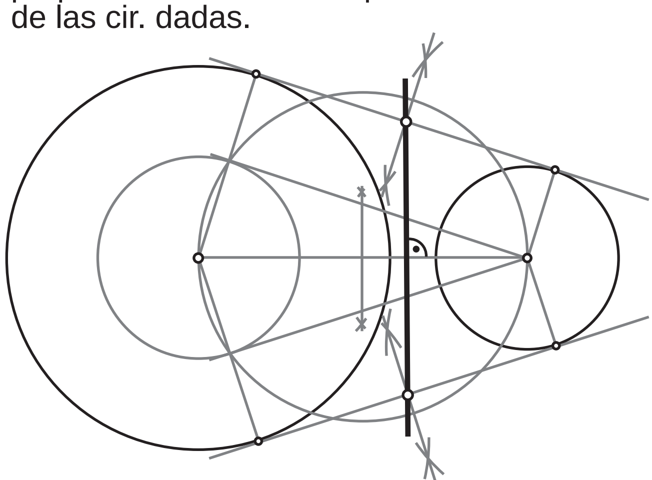


Podemos trazar dos circunferencias auxiliares, secantes a ambas circunferencias dadas
La primera cir. auxliar nos dará dos ejes radicales (s) y (t) que se cortarán en el punto (1). La segunda otros dos (r) y (v) que se cortarán en el punto (2). La recta descrita por (1) y (2) es el eje radical de las cir. dadas.

Es un método que se presta a la imprecisión. Hay que ser muy cuidadoso al trazar los ejes radicales auxiliares



Este método es un híbrido del anterior. Consiste en únicamente trazar una circunferencia auxiliar que nos dará dos ejes radicales y un punto de la recta solución. Desde dicho punto trazaremos una perpendicular a la recta que une los centros de las cir. dadas.



A la izquierda hemos trazado las paralelas exteriores a las dos circunferencias.
A los segmentos comprendidos entre los puntos de tangencia les hemos trazado las mediatrices para comprobar como, EL EJE RADICAL, la recta definida por los dos puntos medios es perpendicular al segmento que une los dos centros de las circunferencias dadas.

Aunque pueda parecer confuso, los procedimientos para trazar el eje radical de circunferencias interiores ES EXACTAMENTE EL MISMO.

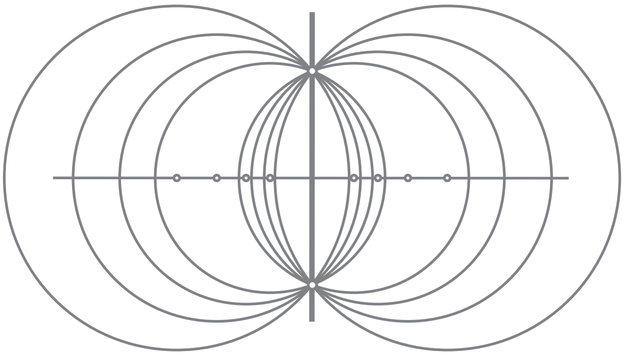
La potencia y el eje radical se aplican en problemas de inversión (transformación geométrica) y TANGENCIAS.

Haz coaxial de Circunferencias

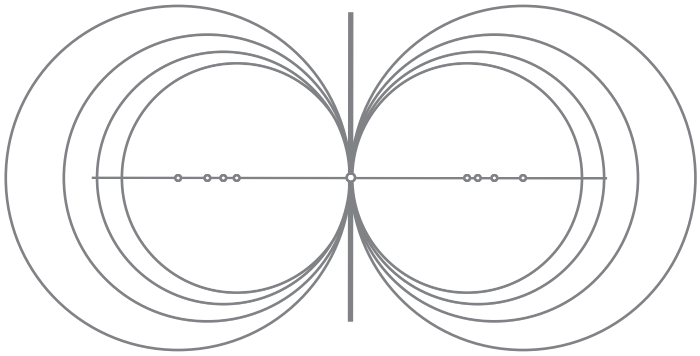
HAZ COAXIAL: Es el conjunto de circunferencias que comparten el mismo eje radical, tienen sus centros alineados.

HAZ SECANTE Es un haz coaxial de circunferencias secantes que comparten los dos puntos de intersección,
HAZ TANGENTE: Se llama así al haz de circunferencias que son tangentes entre sí y que comparten el punto de tangencia situado en el eje radical.
HAZ NO SECANTE (haz ortogonal):

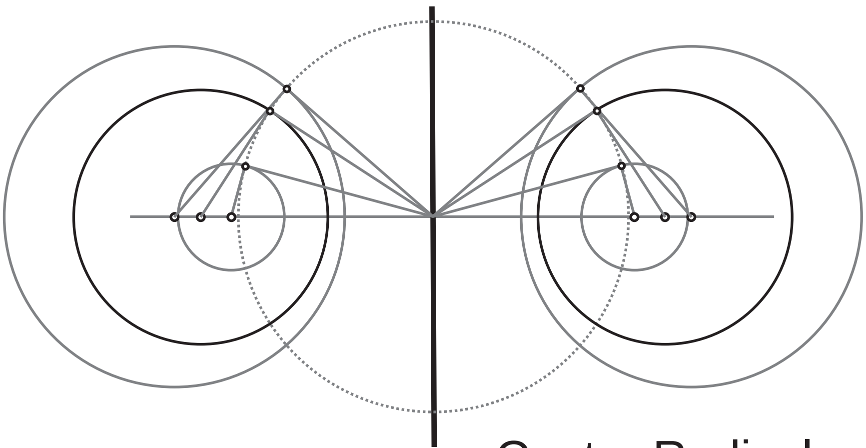
HAZ SECANTE



HAZ TANGENTE



HAZ NO SECANTE / HAZ ORTOGONAL

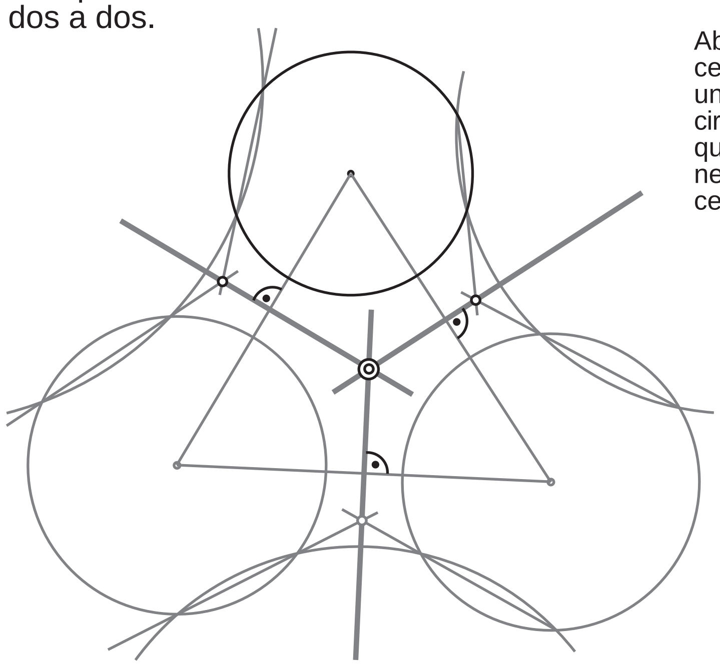


Los radios de la circunferencia central son la representación gráfica de la potencia del eje respecto a las circunferencias del haz.

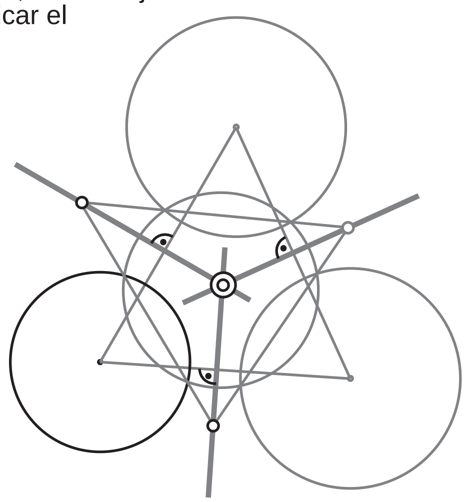
Dichos rádios son perpendiculares a los radios que van a los puntos de tangencia de las circunferencias del haz. que a su vez son tangentes a la circunferencia deiscontinua.

Centro Radical

Llamamos centro radical al punto que tiene la misma potencia respecto a tres circunferencias. Este punto se encuentra en la intersección de los tres ejes radicales que producen las circunferencias dos a dos.



Abajo a la derecha el método más rápido para hallar el centro radical de tres circunferencias exteriores: Trazar una circunferencia auxiliar que corta a las tres circunferencias nos proporcionará, junto con los segmentos que unen los centros, los tres ejes radicales necesarios para ubicar el centro radical.



Centro Radical de tres circunferencias

Otro método para hallar el centro radical:

Consiste en trazar dos circunferencias secantes a las tres dadas. Estas porducen, con cada una de las cir. dadas, dos ejes radicales auxiliares que en sus intersecciones con los otros dos ejes radicales auxiliares quedan definidos los ejes radicales necesarios para encontrar el CENTRO RADICAL..
Es posiblemente el método más limpio y directo, aunque se necesita de cierto espacio en el papel.